ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет»
Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ»
Заключительный этап, 2021-22 учебный год

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Предмет: МАТЕМАТИКА

Фамилия: БАЙБУРИН
Имя: НИКИТА
Отчество: АЛЕКСАНДРОВИЧ

Класс: 11

Образовательное учреждение (по уставу): ФГАОУ ВО ДВФУ
Гимназия ДВФУ

Дата рождения (число, месяц, год) 20.04.2004 г.р.

Домашний адрес (полностью): Приморский край,
г. Владивосток, ул. Карьерная, 17, кв 125

контактный телефон: 79244364735

e-mail: nektman@yandex.ru

3БМ-05

ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет»
Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ»
Заключительный этап, 2021-22 учебный год
БЛАНК ОТВЕТА

1	2	3	4	5	6	Σ
7	7	7	7	7	7	42

№ 1.

Сумма цифр 4-значного числа не больше 36, поэтому год рождения равен хотя бы $2023 - 36 = 1987$, т.е. первые две цифры равны либо 20, либо 19.

1) $\overline{20ab} + (2+0+a+b) = 2023$, (a, b − цифры) $11a + 2b = 21$ $\quad 11a + 2b = 11a$ $\quad a \le \frac{21}{11} = 1\frac{10}{11} \Rightarrow a \le 1$

$2b \le 18 \Rightarrow a \ge \frac{21-18}{11} = \frac{3}{11} \Rightarrow a \ge 1$ $\quad \Rightarrow a = 1$

$a = 1$: $2b = 10$, $b = 5$, и год рождения равен 2015.

2) $\overline{19ab} + (1+9+a+b) = 2023$ $\quad 11a + 2b = 113$ (a, b − цифры) $\quad 2b \le 18 \Rightarrow 11a \ge 113 - 18 = 95 \Rightarrow a = 9$

$a = 9$: $2b = 14$, $b = 7$, и год рождения равен 1997

Ответ: 2015 или 1997.

№ 2.

Лемма: Произведение k последовательных нат. чисел делится на $k!$

Док-во: пусть наибольшее из чисел равно n $(n \ge k)$, тогда произведение равно $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Но $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ − натуральное число, значит $n(n-1)\ldots(n-k+1) ⋮ k!$, ч.т.д.

По лемме имеем следующее:

$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2022 ⋮ 2022!$

$(2022+1)(2022+2)\ldots(2\cdot 2022) ⋮ 2022!$

…

$(2022\cdot 2021+1)(2022\cdot 2021+2)\ldots(2022\cdot 2022) ⋮ 2022!$

$\Downarrow$

$(2022^2)! ⋮ (2022!)^{2022}$, ч.т.д.

Номер листа 1

ШИФР 3ВМ-05

ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет»
Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ»
Заключительный этап, 2021-22 учебный год
БЛАНК ОТВЕТА

№3.

Пусть $t=2y$, тогда имеем следующее:

$\begin{cases} x^2+t^2+z^2 \le 2022 \\ x+t+3z \ge \sqrt{11\cdot 2022} \end{cases}$. В силу КБШ имеем следующее: $\sqrt{x^2+t^2+z^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+3^2} \ge x\cdot 1+t\cdot 1+z\cdot 3 \ge \sqrt{11\cdot 2022}$,

т.е. $\sqrt{x^2+t^2+z^2} \ge \sqrt{2022}$, или же $x^2+t^2+z^2 \ge 2022$.

Но из системы $x^2+t^2+z^2 \le 2022$, поэтому $x^2+t^2+z^2 = 2022$, а КБШ выполняется в виде равенства, т.е. выполняется $\frac{x}{1}=\frac{t}{1}=\frac{z}{3}$, или $z=3x=3t$, т.е. $11x^2=2022$, откуда $x=\pm\sqrt{\frac{2022}{11}}$, но поскольку $11x \ge \sqrt{11\cdot 2022}>0$, т.е. $x=\sqrt{\frac{2022}{11}}$, откуда $t=\sqrt{\frac{2022}{11}}$, $z=3\sqrt{\frac{2022}{11}}$. Проверка: $x^2+t^2+z^2=(1^2+1^2+3^2)\cdot\frac{2022}{11}=2022 \le 2022$; $x+t+3z=(1+1+9)\sqrt{\frac{2022}{11}}=\sqrt{11\cdot 2022} \ge \sqrt{11\cdot 2022}$, т.е. $(x,t,z)=\left(\sqrt{\frac{2022}{11}}, \sqrt{\frac{2022}{11}}, 3\sqrt{\frac{2022}{11}}\right)$ – единственная подходящая тройка, откуда $(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{2022}{11}}, \sqrt{\frac{2022}{22}}, 3\sqrt{\frac{2022}{11}}\right)$.

Ответ: $\left(\sqrt{\frac{2022}{11}}, \sqrt{\frac{2022}{22}}, 3\sqrt{\frac{2022}{11}}\right)$

№4.

Рассмотрим случай $a\le 0$. Тогда $-a\ge 0$, поэтому $||x-a|-a|=|x-a|-a$; $||x-a|-a-a|=|x-a|-2a$; и т.д. имеем $|x-a|-2021a=2022$; т.е. $|x-a|=2021a+2022$. Это ур-е имеет не более 2 корней при любых значениях a, поэтому никакое $a\le 0$ нам не подходит. Далее рассматриваем только $a>0$. В данном случае при применении n раз функции $f(x)=|x-a|$ выглядит как n „зубчиков“, приставленных друг к другу. Они касаются в точках с координатой $y=0$, вершины в точках с координатой $y=a$, касательными угла наклона

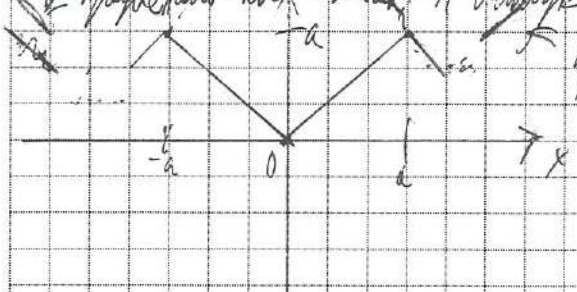
Номер листа 2 ШИФР

№4 (продолжение)

левой и правой прямых, равными -1 и 1 соответственно, и чисто продлёнными до бесконечности самой левой и самой правой прямой.

$f(a)=0$, $f(f(a))=f(0)=a \Rightarrow f(f(\ldots f(a)\ldots))=a$. (см. рисунок)

С продлёнными концами? И вокруг них рисунок третий продлённой справа прямо.



Будем двигать прямую $y=c$ снизу вверх и смотреть на кол-во пересечений.

При $c\in(-\infty;0)$ нет пересечений;

при $c=0$ ровно n пересечений;

при $c\in(0;a)$ ровно $2n$ пересечений;

при $c=a$ ровно $n+1$ пересечений;

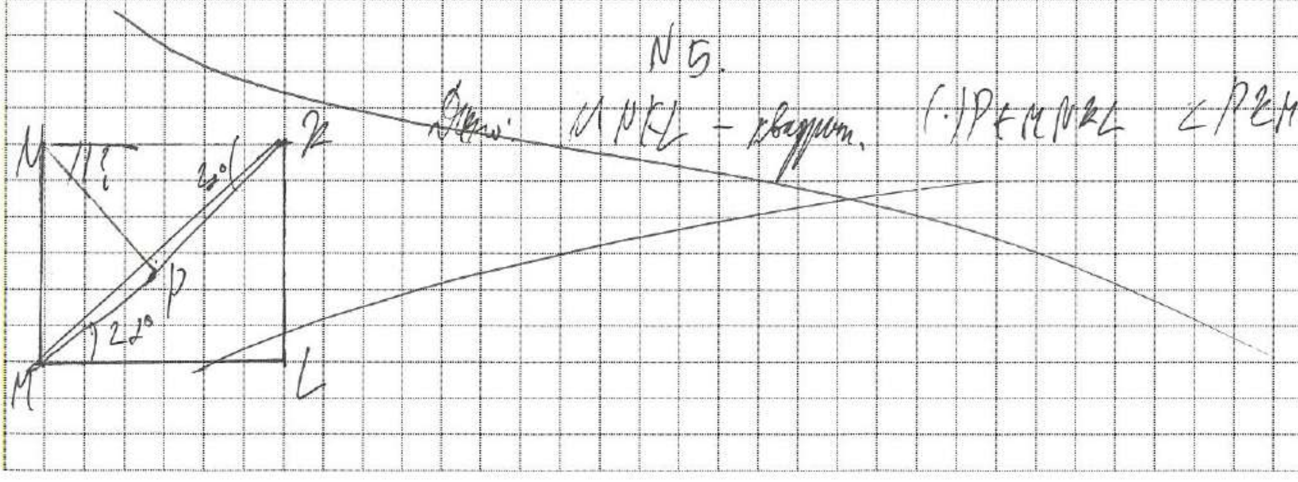
при $c\in(a;+\infty)$ ровно 2 пересечения.

Поскольку в нашем случае $n=2022$, и нам нужно 2023 решения, то подходит только случай $c=a$. Но левая часть уравнения всегда равна 2022, значит, $a=2022$ — единственное возможное решение, и оно подходит.

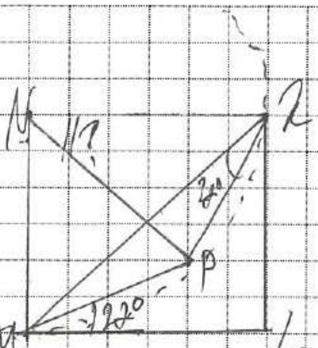
Ответ: $a=2022$.

№5.

Пусть $MNKL$ — квадрат. $(\cdot)P \in MNKL$, $\angle PKM = 2$



№5.



Дано: $MNKL$ - квадрат (·)$P \in MNKL$ $\angle PKM = \angle PML = 22°$

Найти: $\angle PNK$.

Решение: опишем вокруг $\triangle PMK$ окр-ть. Тогда $\frac{1}{2}\smile MP = 22°$ ($\angle MKP$ - вписанный). Проведём касательную в точке M к этой окружности. Заметим, что угол между ней и MP будет равен $\frac{1}{2}\smile MP = 22°$. Но $\angle PML = 22°$, значит, ML - касательная к опис. окр-ти $\triangle PMK$. Но т.к. $MNKL$ - квадрат, то $MN \perp ML$, поэтому центр окр-ти лежит на MN. Но он также лежит на серединном $\perp$-ре к MK, которым ($MNKL$ - квадрат) является NL, т.е. центр лежит на пересечении MN и NL, т.е. в точке N, откуда $MN = NP = NK$ как радиусы, $\angle NKP = \angle NKM - \angle PKM = \frac{90°}{2} - 22° = 22°$, $\angle NPK = \angle NKP = 22°$ ($\triangle PNK$ - равнобед.), и $\angle PNK = 180° - 2 \cdot 22° = 36°$.

7

Ответ: 36°.

№6.

Будем называть наших из чисел нумеруемых с 0, тогда на i-й позиции изначально стоит число 2^i, где $0 \le i \le 2022$.
Прогнозировать ход, который уменьшает 0 на 7, т.е. делает из 0 минус единицу, поскольку иначе число увеличения в каждом ходу не более чем на 7, то отрицательные числа обязательно было равно -7 до уменьшения, а до появления первого отрицательного числа все числа были ≥ 0.

Номер листа 4 ШИФР

ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет»
Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ»
Заключительный этап, 2021-22 учебный год
БЛАНК ОТВЕТА

№6 (продолжение)

Лемма: числа на позициях 2020, 2021 и 2022 непрерывно до проигрыша всегда будут положительны.

Док-во: предположим, ~~что на число на позиции 2020 придётся применить~~ x операций (— что прошло x ходов, где игра ещё не проиграна. Тогда по итогу число стало равно $2^{2020}-x$. Но поскольку позиций, больших или равных 2020, всего 3, а каждый ход уменьшает 4 числа, то каждый ход уменьшал хотя 1 из чисел левее 2020-й позиции на 1, т.е. сумма чисел на позициях 0, 1, ..., 2019 уменьшилась на x, а поскольку игра не проиграна, то все они ≥ 0. Тогда изначально эта сумма была равна $2^0+\ldots+2^{2019} = 2^{2020}-1$, т.е. $x \leq 2^{2020}-1$ и 2020-е число всегда $\geq 2^{2020}-(2^{2020}-1)=1$. Аналогично для 2021-го и 2022-го числа, ч.т.д.

Паша всегда может победить. Стратегия: Паша должен всегда уменьшать все нечётные числа (отн. вел.) на позициях 0, 1, ..., 2019 на 1, т.е. делать их чётными (он может это сделать, т.к. изначально такое число всего одно — 1, а после ходов Пети их может быть не больше 4), а оставшиеся уменьшения применять на числа без позиций 2020, 2021, 2022 произвольно, по лемме они никогда не мешают. Поскольку после ходов Паши всегда остаются только чётные числа в позициях 0, 1, ..., 2019, то −1 там в принципе не может появиться, а остальные числа по лемме также не могут стать отрицательными, значит, Паша не может проиграть, т.е. Паша всегда побеждает, ч.т.д.

Номер листа 5

ШИФР