

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Дальневосточный федеральный университет
Инженерная школа**

И.М. Орощук

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

**Учебное электронное издание
Учебник**



**Владивосток
Дальневосточный федеральный университет
2016**



Министерство образования и науки Российской Федерации
Дальневосточный федеральный университет
Инженерная школа

И.М. ОРОЩУК

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Учебное мультимедийное электронное издание

Учебник

Владивосток
Дальневосточный федеральный университет
2016

УДК 621.391
ББК 32.811.3
О69

Рецензенты: *В.С. Колмогоров*, д.т.н., профессор кафедры гидроакустики Тихоокеанского высшего военно-морского училища им. С.О. Макарова (Владивосток); *С.Н. Павликов*, к.т.н., профессор, заведующий кафедрой радиосвязи и радиоэлектроники Морского государственного университета им. Г.И. Невельского (Владивосток).

Автор: **Орошук Игорь Михайлович**, д.т.н., профессор кафедры электроники и средств связи Инженерной школы (Дальневосточный федеральный университет, Владивосток).

Орошук И.М. Цифровая обработка сигналов: учебник [Электронный ресурс; мультимедийное электронное издание] / Инженерная школа ДВФУ. – Электрон. дан. – Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т, 2016. [270 с.]. – 1 CD. – Систем. требования: процессор с частотой 1,3 ГГц (Intel, AMD); оперативная память от 1 ГБ, Windows (XP; Vista; 7 и т.п.). – ISBN 978-5-7444-3826-5

В учебнике изложены принципы построения цифровых систем и теория цифровой обработки сигналов.

Предназначен для студентов технических вузов, обучающихся по направлению «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». Дополнительно рекомендован студентам и научным сотрудникам для решения прикладных и научных задач при проектировании систем, использующих цифровую обработку сигналов.

Ключевые слова: дискретные сигналы, дискретный спектр, дискретные системы, цифровая фильтрация, оптимальный синтез.

Oroshchuk I. Digital signal processing: manual [Electronic resource]. School of Engineering FEFU. Vladivostok, Far Eastern Federal University, 2016. [270 p.]. 1 CD. ISBN 978-5-7444-3826-5

The manual is intended for technical universities students, studying the discipline “Digital signal processing” in “Infocommunication technologies and communication systems”. Additionally recommended to students and researchers for solving applied and scientific problems when designing systems using digital signal processing.

Key words: discrete-time signals, discrete spectrum, linear discrete systems, digital filtering, optimal synthesis.

Рекомендован Учебно-методическим советом Инженерной школы ДВФУ

Редактор Т.В. Рябкова
Верстка И.М. Орощука
Оформление CD Г.П. Писаревой

Опубликовано: 30.09.2016
Формат EXE
Объем 39,3 МБ [Усл. печ. л. 31,4]
Тираж 50 экз.

Издание подготовлено редакционно-издательским отделом Инженерной школы ДВФУ
[Русский остров, кампус ДВФУ, Инженерная школа, корп. С, каб. С714]

Дальневосточный федеральный университет
690950, Владивосток, ул. Суханова, 8

Изготовитель CD: типография Дирекции публикационной деятельности ДВФУ
690950, Владивосток, ул. Пушкинская, 10

Защищено от копирования

ISBN 978-5-7444-3826-5

© Орощук И.М., 2016
© ФГАОУ ВО «ДВФУ», 2016

Предисловие

Основной целью учебника «Цифровая обработка сигналов» является углубленное изучение принципов построения цифровых систем и теории цифровой обработки сигналов.

В учебнике приведен теоретический материал со строгими выводами полученных выражений. Для удобного восприятия сложного теоретического материала в учебнике широко использован графический материал и рисунки, поясняющие сложные процессы обработки сигналов и принципы их формирования в различных узлах цифровых систем.

Электронная форма учебного материала с использованием гиперссылок позволяет оперативно находить требуемый материал и проводить самоподготовку по контрольным вопросам, представленным в конце каждого раздела учебника, а численные примеры – осваивать практические навыки компетенций дисциплины.

Теоретический материал учебника базируется на работах известных отечественных и зарубежных авторов: В.А. Котельникова, К. Шеннона, И.С. Гоноровского, А. Оппенгейма и Р. Шафера, Р. Лайонса, а также на последних работах С.Н. Воробьева, А.Б. Сергиенко и А.И. Солониной.



ОГЛАВЛЕНИЕ

	Список основных сокращений	10
	Введение	12
1.	Способы представления электрических сигналов	15
	1.1. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы	15
	1.2. Аналогово-цифровое преобразование сигналов.	21
	1.3. Цифро-аналоговое преобразование сигналов	25
2.	Основные способы представления чисел в цифровых устройствах	28
	2.1. Представление и кодирование чисел	28
	2.2. Формат чисел с фиксированной запятой	32
	2.3. Формат чисел с плавающей запятой	36
	2.4. Искажения, возникающие из-за ошибок вычислений	37
3.	Разложение сигналов на ортогональные функции. Спектры Фурье	40
	3.1. Спектр периодических сигналов	40
	3.2. Спектральное представление непериодических функций	50
	3.3. Свойства преобразования Фурье	55



4.	<u>Разложение сигналов во временной ряд Котельникова</u>	64
	<u>4.1. Теорема отсчетов (Котельникова)</u>	64
	<u>4.2. Анализ обратного преобразования дискретизированного сигнала в непрерывный</u>	50
5.	<u>Спектральный анализ дискретных сигналов</u>	74
	<u>5.1. Преобразование Фурье дискретных сигналов</u>	74
	<u>5.2. Дискретное преобразование Фурье</u>	88
	<u>5.3. Свертка дискретных сигналов</u>	91
6.	<u>Быстрое преобразование Фурье</u>	94
	<u>6.1. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ)</u>	94
	<u>6.2. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени</u>	96
	<u>6.3. Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте</u>	105
	<u>6.4. Обратное быстрое преобразование Фурье (ОБПФ)</u>	110
7.	<u>Применение функций Уолша для обработки сигналов</u>	112
	<u>7.1. Функции Уолша и их свойства</u>	112
	<u>7.2. Спектральное разложение сигнала на функции Уолша</u>	119
	<u>7.3. Преобразование сигналов с помощью дискретных функций Уолша</u>	123



8.	<u>Линейные дискретные системы</u>	126
	<u>8.1. Типовые дискретные сигналы и их свойства</u>	126
	<u>8.2. Основная полоса частот ЛДС. Нормированные частоты</u>	132
	<u>8.3. Свойства линейной дискретной системы</u>	133
	<u>8.4. Анализ соотношения вход/выход для ЛДС во временной области</u>	136
	<u>8.5. Разностное уравнение. Рекурсивные и нерекурсивные линейные дискретные системы</u>	139
9.	<u>Анализ дискретных сигналов в Z-области</u>	143
	<u>9.1. Z-преобразование дискретных сигналов и его свойства</u>	143
	<u>9.2. Z-преобразование типовых дискретных сигналов</u>	151
10.	<u>Анализ передаточных функций линейных дискретных систем с помощью Z-преобразований</u>	160
	<u>10.1. Определение передаточных функций линейных дискретных систем по Z-преобразованию разностного уравнения</u>	160
	<u>10.2. Структурные схемы линейных дискретных систем</u>	164

11.	<u>Частотные характеристики линейных дискретных систем</u>	185
	<u>11.1. Преобразование Фурье импульсной характеристики линейной дискретной системы</u>	185
	<u>11.2. Связь частотной характеристики с передаточной функцией</u>	187
	<u>11.3. Экспресс-анализ частотной характеристики линейной дискретной системы</u>	191
12.	<u>Требования к реализации оптимальных цифровых фильтров</u>	200
	<u>12.1. Общие принципы построения и классификация цифровых фильтров</u>	200
	<u>12.2. Меры оптимального синтеза цифровых фильтров</u>	206
	<u>12.3. Условия безыскаженной передачи сигналов в КИХ-фильтрах</u>	212
	<u>12.4. Теорема о линейности ФЧХ КИХ-фильтров</u>	216
13.	<u>Синтез оптимальных КИХ-фильтров методом окон</u>	223
	<u>13.1. Синтез КИХ-фильтров методом окон. Искажения при фильтрации</u>	223
	<u>13.2. Синтез КИХ-фильтров методом окон Кайзера</u>	238
	<u>13.3. Методика синтеза КИХ-фильтров методом окон</u>	241

14.	<u>Синтез оптимальных КИХ-фильтров Чебышева</u>	252
	<u>14.1. Методика синтеза оптимальных КИХ-фильтров Чебышева</u>	252
	<u>14.2. Полином Чебышева</u>	258
	<u>14.3. Теорема Чебышева</u>	261
	<u>Заключение</u>	266
	<u>Список литературы</u>	267
	<u>От автора</u>	270



Список основных сокращений

АЦП – аналогово-цифровое преобразование;

АЧХ – амплитудно-частотная характеристика;

БИХ – бесконечная импульсная характеристика;

БПФ – быстрое преобразование Фурье;

ДПФ – дискретное преобразование Фурье;

ИХ – импульсная характеристика;

КИХ – конечная импульсная характеристика;

ЛДС – линейная дискретная система;

ОБПФ – обратное быстрое преобразование Фурье;

ПФ – полосовой фильтр;

РУ – разностное уравнение;

РФ – режекторный фильтр;

ФВЧ – фильтр высоких частот;

ФНЧ – фильтр нижних частот;
ФЧХ – фазочастотная характеристика;
ЦАК – цифровой амплитудный корректор;
ЦАП – цифро-аналоговое преобразование;
ЦД – цифровой дифференциатор;
ЦОС – цифровая обработка сигналов;
ЦПГ – цифровой преобразователь Гильберта;
ЧХ – частотная характеристика;
ЭВМ – электронная вычислительная машина;
FFT – Fast Fourier Transform.



Введение

Крупнейшим научным достижением в области теории связи является открытие **теоремы отсчетов**, благодаря которой инженеры получили возможность создания цифровых систем, свершивших в конце XX в. революцию в электросвязи.

Отечественный ученый **Котельников Владимир Александрович**, пытаясь найти ответ на принципиальный вопрос, какова же минимальная полоса частот, необходимая для передачи по каналу связи сообщения, спектр которого строго ограничен, доказал теорему отсчетов. Свое открытие он опубликовал в докладе «**О пропускной способности “эфира” и проволоки в электросвязи**» в книге «Материалы по радиосвязи к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности», изданной Всесоюзным энергетическим комитетом в 1933 г.

Независимо от него теорема отсчетов была представлена в 1949 г. выдающимся американским ученым **К. Шенноном** – создателем важного раздела теории связи – теории информации. Следует отметить, что как один из частных математических результатов теории интерполяции функции эта теорема была открыта еще в начале XX века, в 1915 г. английскими математиками **Э.Т. Уиттекером** и **Дж.М. Уиттекером**.



Кроме того, ранние работы Г. Найквиста по определению ширины частотного диапазона, требуемого для передачи информации, заложили основы для последующих успехов К. Шеннона при разработке теории информации.

В мировой литературе за теоремой отсчетов закрепилось название **теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона (УКШ)**.

С момента разработки теории преобразования аналоговых сигналов в цифровые возникла возможность представления любых сигналов в цифровой форме, что дало толчок к разработке методов цифровой обработки сигналов (ЦОС) и широкому внедрению этих методов в различные сферы применения радиотехнических систем.

Исследования цифровых методов обработки сигналов показали высокие потенциальные возможности их использования в ранее разработанных инфокоммуникационных системах, позволившие максимально приблизить характеристики реализаций таких систем к предельным теоретическим возможностям. Кроме того, раскрыты принципиально новые алгоритмы и методы обработки сигналов, существенно расширяющие возможности современных инфокоммуникационных и других радиотехнических систем.

В процессе исследований и внедрения новых методов ЦОС учеными был разработан большой объем теоретического материала, отличающегося от классических методов анализа аналоговых цепей и систем.



Накопленный за последние десятилетия опыт разработки и применения цифровых радиотехнических систем фактически сформировал новое направление в теории, на основе которой пока ограниченным числом авторов делается попытка систематизации знаний для подготовки современных специалистов в области ЦОС.

В данном издании автор представил материал для углубленного изучения методов цифровой обработки сигналов в области инфокоммуникаций:

- способы представления сигналов;
- теоретические основы аналогово-цифрового преобразования сигналов;
- шумы квантования при аналогово-цифровом преобразовании;
- формы представления чисел в устройствах ЦОС;
- шумы и предельные циклы, возникающие в системах ЦОС;
- спектральный анализ аналоговых сигналов;
- спектральный анализ дискретных сигналов;
- быстрое преобразование Фурье (БПФ);
- применение функций Уолша для обработки сигналов;
- теория линейных дискретных систем;
- Z-преобразование дискретных сигналов;
- синтез КИХ- и БИХ-фильтров;
- синтез оптимальных КИХ-фильтров методом окон;
- синтез оптимальных КИХ-фильтров Чебышева.

1. Способы представления электрических сигналов

Учебные цели.

Изучить: способы представления электрических сигналов и их основные параметры; общие принципы аналогово-цифрового (АЦП) и цифро-аналогового (ЦАП) преобразования сигналов и основные параметры этих преобразователей, возникающие искажения (шум квантования) при преобразовании, а также влияние параметров устройств АЦП и ЦОС на качественные характеристики цифровых систем.

1.1. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы

Физический процесс, несущий передаваемое сообщение, называется **сигналом**. В общем случае в качестве сигнала можно использовать любой физический процесс, изменяющийся пропорционально с переносимым сообщением. В современных системах связи чаще всего используются **электрические сигналы**.

Существует несколько способов представления сигнала:

- непрерывный по состояниям и времени (непрерывный или аналоговый сигнал);
- дискретный по состояниям, непрерывный во времени;
- непрерывный по состояниям, дискретный во времени;
- дискретный по состояниям и времени (дискретный сигнал).

Непрерывным (аналоговым) сигналом называют сигнал, который принимает в некотором интервале любые мгновенные значения напряжения во времени (**рис. 1.1**).

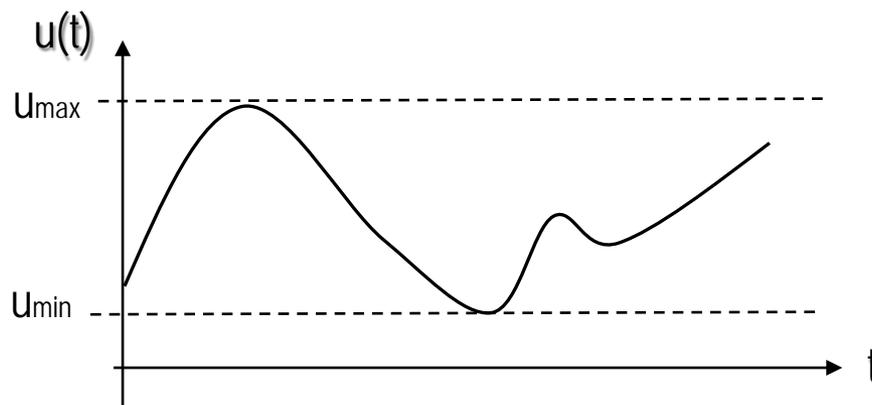


Рис. 1.1. Непрерывный (аналоговый) сигнал

Сигнал, принимающий дискретные состояния напряжений в любые моменты времени t_i , называется дискретным по состоянию, непрерывным во времени (**рис. 1.2**).

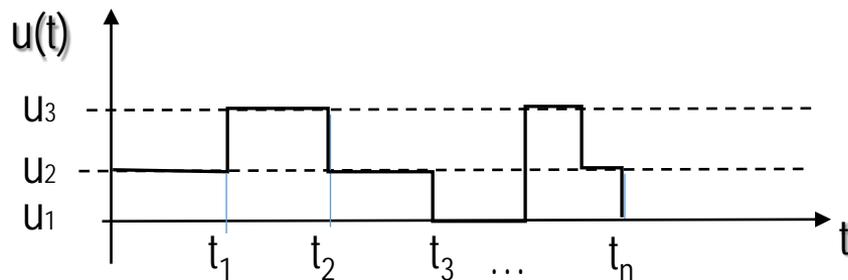


Рис. 1.2. Сигнал дискретный по состоянию, непрерывный во времени

Сигнал, принимающий в некотором интервале любые состояния напряжений в дискретные моменты времени, называется непрерывным по состоянию, дискретным во времени (рис. 1.3).

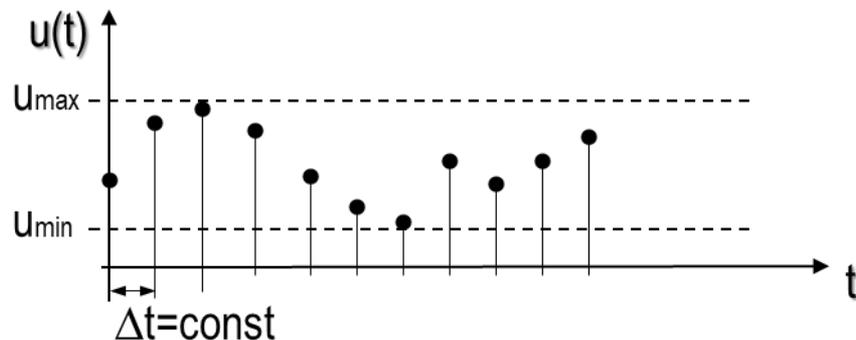


Рис. 1.3. Сигнал непрерывный по состоянию, дискретный во времени

Сигнал, принимающий дискретные состояния напряжений в дискретные моменты времени, называется дискретным по состоянию и времени (дискретным сигналом) (рис. 1.4).

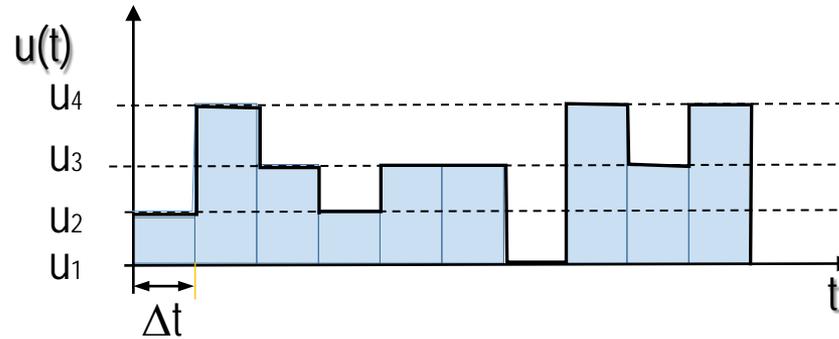


Рис. 1.4. Дискретный сигнал

Аналоговый сигнал можно представить в виде функций времени и в виде амплитудного спектра (**рис. 1.5**).

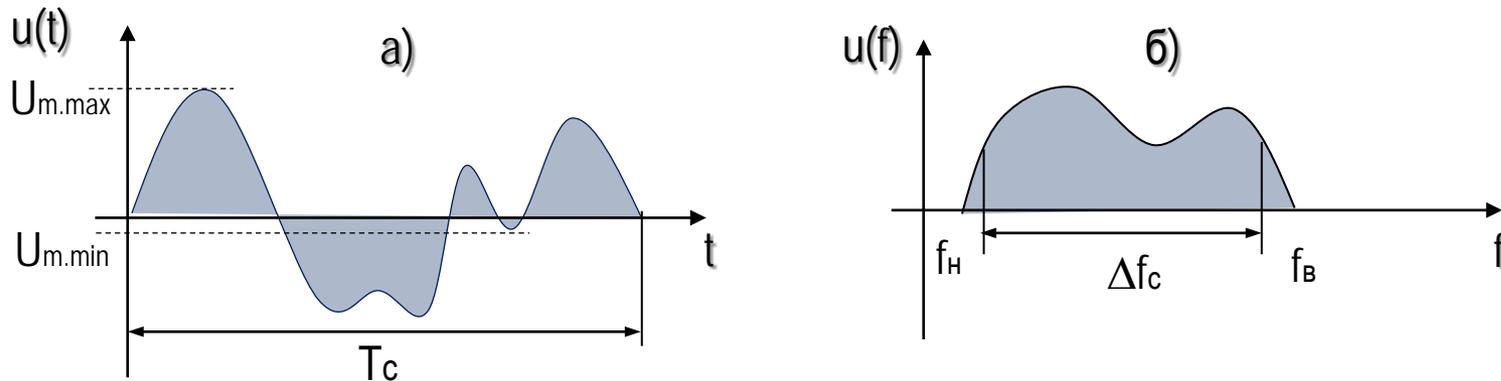


Рис. 1.5. Аналоговый сигнал: а – во времени; б – в виде амплитудного спектра

Основными параметрами аналогового сигнала являются:
 H_c – динамический диапазон; Δf_c – ширина спектра; T_c – длительность сигнала.

Динамический диапазон определяется отношением максимального к минимальному значению амплитуды напряжения сигнала:

$$H_c = \frac{U_{m.max}}{U_{m.min}}; \quad \text{или в децибелах:} \quad H_{c,дБ} = 20 \lg \frac{U_{m.max}}{U_{m.min}}. \quad (1.1)$$

Ширина спектра сигнала определяется по амплитудному спектру разностью между верхней и нижней граничными частотами:

$$\Delta f_c = f_B - f_H. \quad (1.2)$$

Дискретный сигнал также можно представить в масштабе времени и в виде амплитудного спектра (**рис. 1.6**).

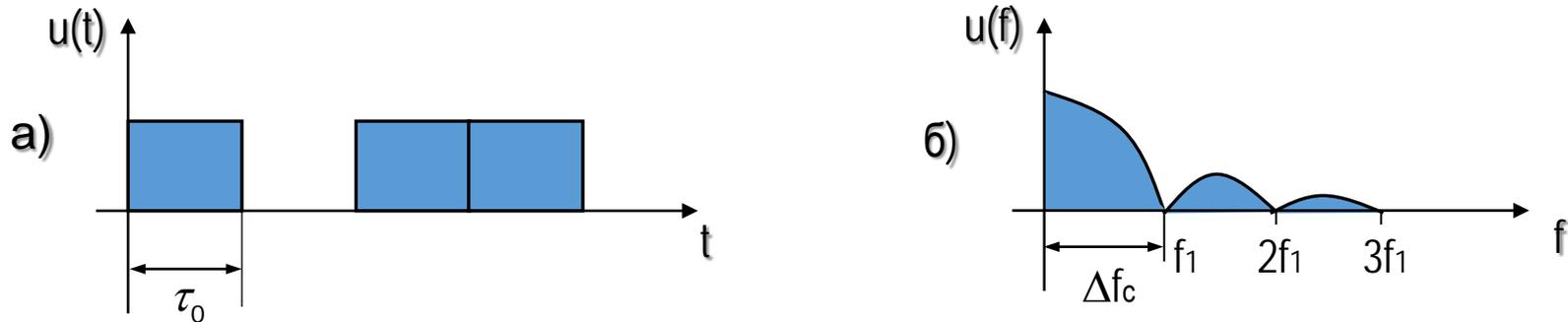


Рис. 1.6. Дискретный сигнал: а – во времени; б – в виде амплитудного спектра

Основными параметрами дискретного сигнала являются:
 τ_0 – длительность элементарной посылки и Δf – ширина спектра.

Ширина спектра в общем случае для дискретного сигнала бесконечна, но более **80% мощности сигнала** сосредоточено в пределах полосы:

$$\Delta f_c = \frac{1}{\tau_0}. \quad (1.3)$$

Цифровой сигнал

Для передачи информации, представленной в цифровом виде, используются дискретные сигналы, разным уровням которых присваиваются определенные цифровые символы. Чаще всего используются бинарные (двоичные) символы «0» и «1». Такие сигналы принято называть **цифровыми сигналами** (рис. 1.7).

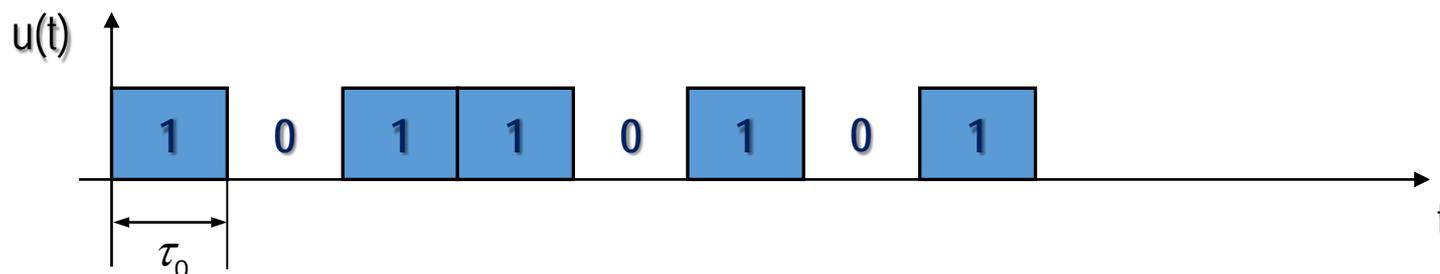


Рис. 1.7. Цифровой сигнал, несущий информацию: «10110101»

1.2. Аналогово-цифровое преобразование сигналов

Базовыми элементами цифровых систем являются аналогово-цифровые (АЦП) и цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП), построенные на основе теоремы отсчетов, благодаря которым аналоговые сигналы преобразуются в цифровые, после чего возможно применение цифровых методов обработки сигналов. После выполнения необходимых цифровых преобразований цифровой сигнал с помощью ЦАП вновь преобразуется в аналоговую форму. На **рис. 1.8** представлена обобщенная функциональная схема системы цифровой обработки сигналов.



Рис. 1.8. Функциональная схема системы цифровой обработки сигналов

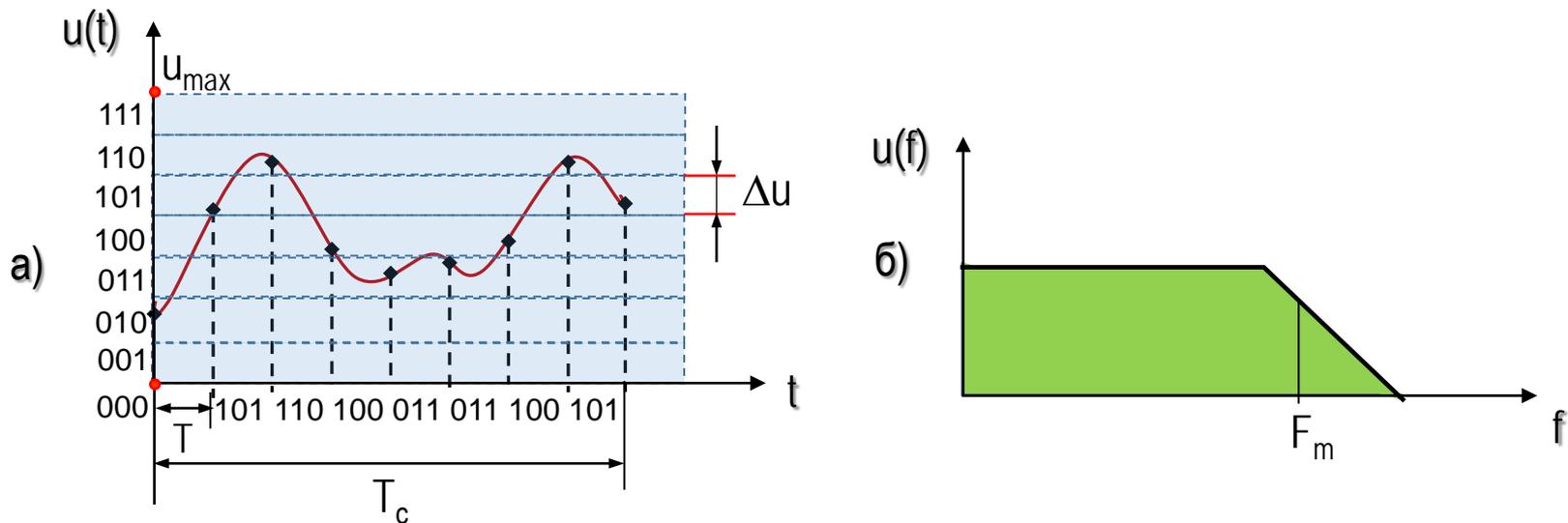
Аналогово-цифровое преобразование строится на основе дискретной выборки отсчетов аналогового сигнала (**рис. 1.9**). Для полной передачи информации об аналоговом сигнале период между отсчетами, согласно теореме Котельникова ([подробно рассмотрена в 4 разделе](#)), не должен превышать

$$T \leq \frac{1}{2F_m}, \quad (1.4)$$

где F_m – максимальная (верхняя граничная) частота спектра преобразуемого (дискретизируемого) аналогового сигнала. Максимальная частота АЦП называется частотой Найквиста, которая определяется половиной частоты дискретизации:

$$F_n = \frac{1}{2T} = \frac{f_d}{2}. \quad (1.5)$$

Преобразование отсчетов дискретизированного сигнала в цифровую форму основано на процедуре квантования уровней напряжения (**см. рис. 1.9**). В этом случае заданный динамический диапазон напряжений аналогового сигнала разбивается на несколько равных интервалов квантования Δu , каждый из которых кодируется в порядке возрастания уровней. При попадании отсчета в тот или иной интервал квантования, ему присваивается соответствующий цифровой код.



в) 010 101 110 100 011 011 100 110 101

Рис. 1.9. Пояснение процесса дискретизации и квантования аналогового сигнала:

а – сигнал в масштабе времени; б – спектр сигнала;
в – цифровой код оцифрованного аналогового сигнала

Установленный код длиной n передается за период дискретизации T , откуда длительность элемента цифрового сигнала τ_0 , несущего один бит информации, будет определяться выражением

$$\tau_0 = \frac{T}{n} = \frac{1}{2F_m n}. \quad (1.6)$$

Величина интервала квантования уровней напряжения Δu определяет точность аналогово-цифрового преобразования сигнала. Для повышения точности преобразования данный интервал следует уменьшать. Количество интервалов квантования Δu определяет **динамический диапазон АЦП**:

$$H = \frac{u_{\max}}{\Delta u} = 2^n, \quad (1.7)$$

где u_{\max} – максимальное значение напряжения в заданном динамическом диапазоне; Δu – минимальный уровень сигнала (определяется интервалом квантования); n – разрядность двоичного кода квантования уровней.

Для обеспечения заданного динамического диапазона потребуется цифровой двоичный код с разрядностью n (выбирается ближайшее большее целое значение):

$$n \geq \log H = \log \frac{u_{\max}}{\Delta u}. \quad (1.8)$$

Следует заметить, что с ростом разрядности **АЦП** потребуется повышенная скорость передачи информации и больший объем памяти для его хранения. Необходимый объем оперативной памяти для хранения в цифровой форме сигнала длительностью T_c с шириной спектра F_m (**см. рис. 1.9**) и разрядностью цифрового кода n определяется

$$\text{RAM} = T_c / \tau_0 = 2T_c F_m n. \quad (1.9)$$

где τ_0 – длительность одного бита информации.

1.3. Цифро-аналоговое преобразование сигналов

Процедура цифро-аналогового преобразования (ЦАП) заключается в преобразовании цифрового кода в дискретную последовательность уровней и в формировании по ним сглаженной огибающей аналогового сигнала (рис. 1.10) ([подробный теоретический анализ ЦАП рассмотрен в 4 разделе](#)).

а) 010 101 110 100 011 011 100 110 101

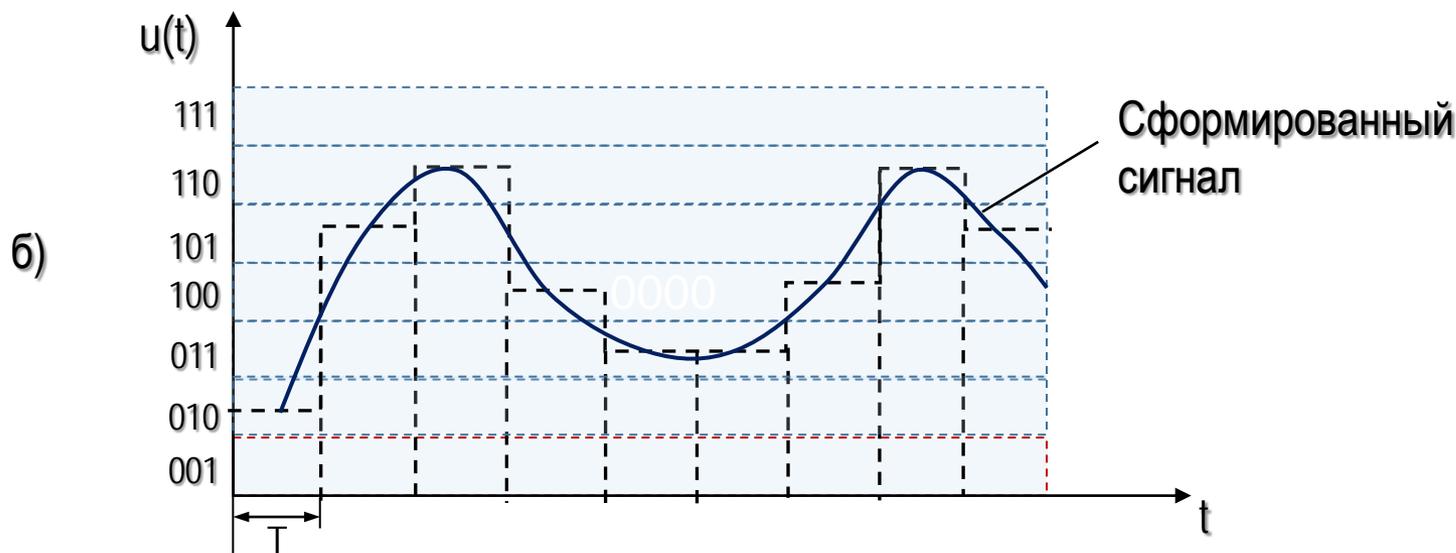


Рис. 1.10. Пояснение процесса цифро-аналогового преобразования сигнала:
а – цифровой сигнал; б – аналоговый сигнал, полученный путем ЦАП

В результате преобразований АЦП и ЦАП из-за ограниченной точности квантования аналогового сигнала возникает погрешность (**рис. 1.11**), которая эквивалентна аддитивному наложению мешающего сигнала. Погрешность определяется разностью напряжений между сигналом источника $u_{\text{ист}}$ и сформированным после процедур АЦП и ЦАП аналоговым сигналом $u_{\text{цап}}$:

$$e_{\text{кв}} = u_{\text{ист}} - u_{\text{цап}}. \quad (1.10)$$

В силу случайности возникающей погрешности и квантовой природы его возникновения разностный сигнал называют **шумом квантования**, максимальная амплитуда которого не превышает половину шага квантования $\Delta u/2$.

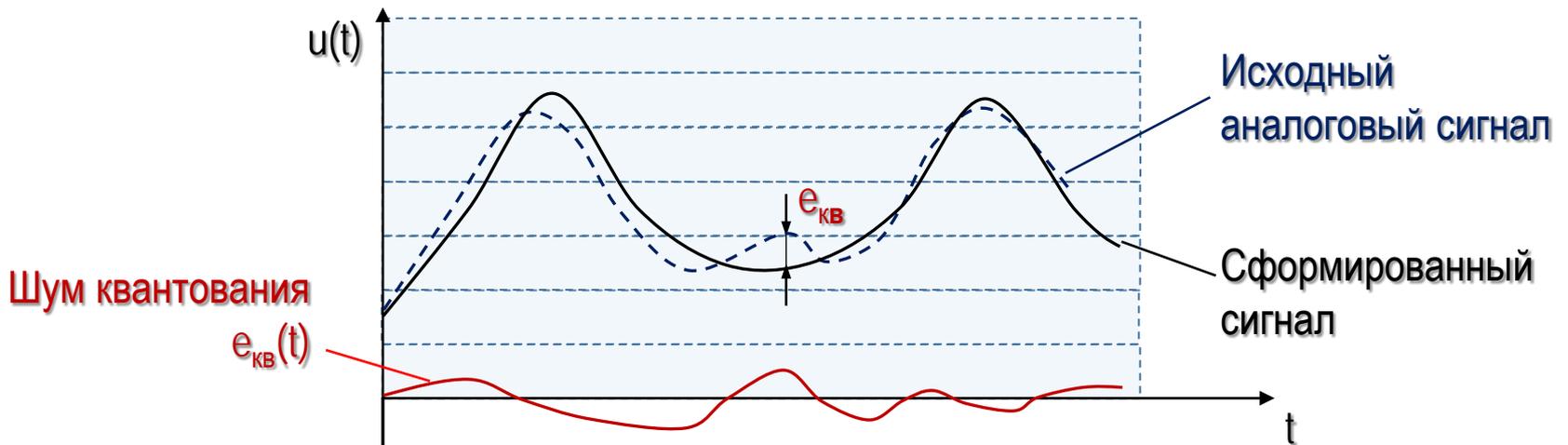


Рис. 1.11. Пояснение о возникновении шума квантования

Величина шума квантования $e_{\text{КВ}}$ носит случайный характер с равномерным распределением:

$$W(e_{\text{КВ}}) = \frac{1}{\Delta u}, \quad -\frac{\Delta u}{2} \leq e_{\text{КВ}} \leq \frac{\Delta u}{2}, \quad (1.11)$$

среднее значение которого равно $\mu_e=0$, а дисперсия $D_e=\Delta u^2/12$.

Перечень контрольных вопросов:

1. [Способы представления электрических сигналов.](#)
2. [Основные параметры аналоговых и дискретных сигналов.](#)
3. [Сущность способа дискретизации аналогового сигнала.](#)
4. [Принцип квантования дискретизированного сигнала.](#)
5. [Основные параметры дискретизированного сигнала.](#)
6. [Причины возникновения шумов квантования в процессе АЦП сигналов.](#)

2. Основные способы представления чисел в цифровых устройствах

Учебные цели.

Изучить: формы представления чисел в цифровых устройствах; методы преобразования чисел в различные формы и способы выполнения вычислительных операций; причины возникновения ошибок при выполнении вычислительных операций, вызывающих шум квантования и предельные циклы в цифровых системах.

2.1. Представление и кодирование чисел

В цифровых устройствах используются числа с фиксированной длиной, которые в зависимости от решаемых задач имеют разные коды: прямой, обратный, дополнительный и смещенный код.

Прямой код: $sm_1m_2m_3\dots m_N$,

в котором старший разряд s несет информацию о знаке числа: «0» – положительное число, «1» – отрицательное число; последующие N знаков – это модуль числа, представленного в двоичном коде 10110...1.

Пример: числу **126** в 8-разрядном коде, где первый символ отводится на знак, а 7 – на модуль числа, соответствует число **01111110**, а числу **-126** – **11111110**.

Обратный код: $sm_1m_2m_3\dots m_N$,

в котором старший разряд s несет информацию о знаке числа: «0» – положительное число, «1» – отрицательное число; последующие N знаков – это модуль числа, представленного в двоичном коде. В случае положительного числа, код записывается без изменений, а для отрицательных чисел – инвертируется (включая знаковый символ).

Пример: числу **126** в 8-разрядном коде, где первый символ отводится на знак, а 7 – на модуль числа, соответствует двоичный код **01111110**, а отрицательному числу **-126** соответствует код **10000001**.

Дополнительный код: $sm_1m_2m_3\dots m_N$,

в котором старший разряд s несет информацию о знаке числа: «0» – положительное число, «1» – отрицательное число; последующие N знаков – это модуль числа, представленного в двоичном коде. В случае положительного числа, код записывается без изменений, а для отрицательных чисел – инвертируется (включая знаковый символ), и к результату прибавляют «1».

Пример: число **126** в 8-разрядном коде, где первый символ отводится на знак, а 7 – на модуль числа, соответствует двоичный код **01111110**, а отрицательному числу **-126** соответствует код **10000001** – инверсия и добавление «1»: **10000001+1=10000010**.

Смещенный код: $sm_1m_2m_3\dots m_N$,

в котором старший разряд s несет информацию о знаке числа: «1» – положительное число, «0» – отрицательное число; последующие N знаков – это модуль числа, представленного в двоичном коде, который получается путем сложения к константе 2^N модуля числа с соответствующим знаком, где N – разрядность всего числа, не считая знакового символа.

Пример: положительному и отрицательному числу **126**, в 8-разрядном коде, где первый символ отводится на знак, а 7 символов – на модуль числа (**1111110**), соответствуют числа:

<p>числу +126:</p> $\begin{array}{r} 10000000 \\ + 1111110 \\ \hline 11111110 \end{array}$	<p>отрицательному числу -126:</p> $\begin{array}{r} 10000000 \\ - 1111110 \\ \hline 00000010 \end{array}$
---	--

Для представления дробных чисел используется формат с фиксированной и плавающей запятой.



2.2. Формат чисел с фиксированной запятой

Формат дробных чисел с фиксированной запятой обозначают парой чисел: **M.N**. Число **M** означает число разрядов его целой части, включая знак, а **N** – число разрядов дробной части. Чаще всего **M=1**. В этом случае одноразрядное число означает только его знак: «+» или «–», а само число не превышает единицы.

Рассмотрим вариант формата **1.15**. В этом формате один (первый) разряд используется в качестве знака числа, а остальные 15 разрядов для дробной части числа. Такие числа кратны

$$2^{-15} = 1/32768 \approx 3 \cdot 10^{-5},$$

т.е. результат определяется как $2^b/32768$, где **b** – десятичное число, определяющее степень возведения **2**.

Так, например, десятичному числу $A_{(10)} = 18501/32768 = 0,564605713$ соответствует число в двоичной форме в формате 1.15 с фиксированной запятой $A_{(2)} = 0,100100001000101$, что соответствует $A_{(10)} = 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-9} + 2^{-13} + 2^{-15}$ (рис. 2.1).

Знак	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
+	2 ⁻¹	2 ⁻²	2 ⁻³	2 ⁻⁴	2 ⁻⁵	2 ⁻⁶	2 ⁻⁷	2 ⁻⁸	2 ⁻⁹	2 ⁻¹⁰	2 ⁻¹¹	2 ⁻¹²	2 ⁻¹³	2 ⁻¹⁴	2 ⁻¹⁵

Рис. 2.1. Пример представления двоичного числа в форме с фиксированной запятой

Абсолютная величина двоичных чисел с фиксированной запятой находится в пределах

$$0 \leq |A| \leq 1 - 2^{-N}, \quad (2.1)$$

где N – количество числовых разрядов b в двоичном коде после запятой.

В **табл. 2.1** показан пример двоичных чисел и соответствующих им десятичных **форм дополнительного кода** и кода в формате **1.15**.

Таблица 2.1

Пример представления чисел в формате 1.15

Двоичное представление		Десятичное представление	
В виде дополнительного кода в формате 1.15	В виде стандартных чисел в формате 1.15	В форме дроби	
0 000 0000 0000 0000	0	0/32768=0	
0 000 0000 0000 0001	1	1/32768	
0 000 0000 0000 0010	2	2/32768	
...	
0 111 1111 1111 1110	3267	32767/32768	
0 111 1111 1111 1111	32768	32768/32768=1	
1 111 1111 1111 1110	-2	- 2/32768	
1 111 1111 1111 1111	-1	-1/32768	

Арифметические операции. Рассмотрим операции сложения и умножения чисел с фиксированной запятой.

Сложение. При сложении чисел с одинаковыми знаками в дополнительном коде, содержащих один разряд в целой части, результат может превысить 1, что может вызвать переход старшего значащего разряда в знаковый разряд. Такой случай соответствует переполнению памяти вычислительного устройства, который приводит к ошибке вычисления.

Рассмотрим пример. Вычислим сумму чисел $C=A+B$, где $A_{(10)}=0,75$, $B_{(10)}=0,375$. Переведем числа в дополнительный код двоичной формы: $A_{(2)}=0,110$, $B_{(2)}=0,011$. Выполним операцию сложения в двоичном коде:

$$\begin{array}{r} 0,110 \\ + 0,011 \\ \hline 1,001. \end{array}$$

В результате сложения положительных чисел получено отрицательное число $C_{(2)\text{доп}} = 1,001$. Преобразуем его в прямой код: $C_{(2)\text{пр}} = 1,111$. Этому числу соответствует десятичное число $C_{(10)} = -0,875$ вместо истинного значения $C_{(10)\text{ист}} = 1,125$. В данном случае ошибка произошла из-за ограниченности числа разрядов в целой части числа: $E_{(10)} = C_{(10)} - C_{(10)\text{ист}} = -0,875 + 1,125 = 0,25$. Свойство изменения знака при переполнении памяти позволяет обнаруживать такие моменты в вычислительных устройствах.

Умножение. При умножении чисел с фиксированной запятой требуется удвоенное число числовых разрядов $2N$ по отношению к их числу в сомножителях и один дополнительный разряд для знака. В противном случае при вычислении будет допускаться ошибка.

Рассмотрим пример. Вычислим произведение нормированных чисел $C=A \times B$, где $A_{(10)} = 0,75$, $B_{(10)} = 0,375$, которые в двоичной форме имеют вид $A_{(2)} = 0,110$, $B_{(2)} = 0,011$. Выполним операцию умножения $C_{(2)\text{доп}} = A_{(2)\text{доп}} B_{(2)\text{доп}}$:

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 011 \\ \hline 110 \\ + 110 \\ \hline 10010 \end{array}$$

с учетом порядка $C_{(2)\text{доп}} = 0,01001$.

В десятичной форме произведение равно $C_{(10)} = 0,28125$, которое совпадает с истинным значением $C_{(10)\text{ист}} = 0,28125$. Из приведенного примера видно, что если пронормировать числа, то при умножении не произойдет переполнение памяти. Ошибка может произойти лишь при ограниченности числа числовых разрядов, которая находится в пределах: $2^{-(N+1)} \geq E_{(10)} \geq 2^{-2N}$, где N – количество разрядов умножаемых двоичных чисел. В частности, если ограничиться тремя исходными разрядами, то ошибка в приведенном примере при округлении $C_{(2)\text{доп}} \approx 0,010$ будет равна $E_{(10)} = |C_{(10)} - C_{(10)\text{ист}}| = |0,25 - 0,28125| = 0,03125$.



2.3. Формат чисел с плавающей запятой

Для эффективного использования памяти вычислительных устройств и снижения ошибок вычислений целесообразнее использовать формат чисел с плавающей запятой, обеспечивающий нормализацию всех чисел:

$$x = \mu \cdot 2^e, \quad (2.2)$$

где μ – мантисса (mantissa), а e – порядок (exponent) числа. В такой форме возникает неоднозначность чисел:

$$2 = 2 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2^1 = 0,5 \cdot 2^2 = \dots$$

Для однозначности вводятся ограничения мантиссы: $0,5 \leq |\mu| < 1$ или $1 \leq |\mu| < 2$. Такая процедура называется нормализацией.

В результате, заранее будет известно, что используемая целая часть ограничена $[1/2, 1]$ или $[1, 2]$.

Общий формат таких чисел имеет вид: **s e e m m m**.

Здесь используется один символ **s** для знака числа, два разряда для его порядка **e e** и три разряда для дробной части мантиссы. Пример: при $1 \leq |\mu| < 2$ десятичному числу $-1,5 \cdot 2^2$ соответствует двоичное число в формате с плавающей запятой **1 10 101** (рис. 2.2).

s	e ₁	e ₀	m ₂	m ₁	m ₀
1	1	0	1	0	1
–	2 ¹	2 ⁰	2 ²	2 ¹	2 ⁰
–	2		5		

Рис. 2.2. Пример представления числа $-1,5 \cdot 2^2$ в двоичной форме с плавающей запятой

2.4. Искажения, возникающие из-за ошибок вычислений

Шум квантования. Приведенный анализ показал, что в результате выполнения вычислительных операций в системах ЦОС могут возникнуть ошибки, связанные с ограниченной разрядностью устройств вычисления, которые вносят изменение в выходной сигнал за счет усечения при округлениях во время вычислительных операций.

Ошибки проявляются в случайные моменты и имеют дискретный характер, в связи с чем их называют шумом квантования. Шум квантования имеет среднее значение $\mu_y = 0$ и дисперсию, определяющую его мощность:

$$D_y = (Q_y)^2 / 12. \quad (2.3)$$

Здесь Q_y – шаг квантования двоичных чисел; $Q_y = 2^{-N}$.

Разностный сигнал между точным $X_{\text{ист}}$ и полученным усеченным значением X_y на выходе устройства ЦОС формирует **внутренний шум** цифровой системы:

$$e_y = X_{\text{ист}} - X_y. \quad (2.4)$$

Таким образом, внутренний шум возникает на выходе устройства ЦОС за счет реакции на шум квантования, вызванный усечением чисел и переполнением памяти при вычислениях, а также за счет ограниченной точности квантования при АЦП сигналов ([см. подр. 1.3](#)).

Предельные циклы. Процесс усечения чисел и переполнение памяти вызывают предельные циклы в цифровых устройствах. Такие явления носят нелинейный характер и чаще всего возникают в цифровых фильтрах. То есть цифровые цепи за счет такого эффекта всегда вносят нелинейные искажения.

Различают предельные циклы низкого уровня, называемые также эффектом мертвой зоны, и предельные циклы переполнения.

Предельные циклы низкого уровня происходят в результате округления промежуточных результатов вычислений, которые вызывают незатухающие колебания малой амплитуды. Они возникают только на выходе [рекурсивных цифровых цепей](#) (цифровых фильтров) в отсутствие входного сигнала.

Предельные циклы переполнения происходят во время вычислений при переполнении разрядной сетки. В этих случаях в цифровых цепях могут возникать незатухающие колебания большой амплитуды, вызванные нелинейностью характеристики квантования в виде ограничения (насыщения). Такие колебания представляют собой периодические последовательности, изменяющиеся между предельными отрицательными и положительными значениями.

В частности, при цифровой обработке звуковых сигналов явление предельных циклов может вызвать дополнительный шум в паузах между звуковыми сигналами в виде дополнительных звуков разной тональности (гул, свист и др.).

В общем случае возникновение предельных циклов неприемлемо для цифровых систем, однако в некоторых случаях такие эффекты могут быть использованы для генерирования незатухающих периодических колебаний.

Перечень контрольных вопросов:

1. [Представление и кодирование чисел в цифровых устройствах.](#)
2. [Формат дробных чисел с фиксированной запятой.](#)
3. [Арифметические операции с двоичными числами.](#)
4. [Формат дробных чисел с плавающей запятой.](#)
5. [Причины возникновения шума квантования.](#)
6. [Причины, вызывающие предельные циклы.](#)

3. Разложение сигналов на ортогональные функции. Спектры Фурье

Учебные цели.

Изучить: способы разложения сигналов на ортогональные функции, в тригонометрические ряды Фурье и спектральный анализ Фурье; методы разложения периодических сигналов в ряды Фурье и определения спектров непрерывных (аналоговых) сигналов; основные свойства преобразований Фурье.

3.1. Спектр периодических сигналов

В общем случае любой непрерывный или кусочно-непрерывный сигнал $s(t)$ на интервале $[a, b]$ можно разложить в ряд через простые ортогональные функции $\varphi_k(t)$, удобные для математического анализа:

$$s(t) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(t), \quad (3.1)$$

где c_k – это коэффициенты ряда, определяемые

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k(t)\|^2} \int_a^b s(t)\varphi_k(t)dt. \quad (3.2)$$

В выражении **(3.2)** $\|\varphi_k(t)\|$ – это норма функции $\varphi_k(t)$:

$$\|\varphi_k(t)\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_k^2(t)dt}. \quad (3.3)$$

Функции $\varphi_k(t)$ должны обладать свойством ортогональности на интервале $[a, b]$:

$$\int_a^b \varphi_k(t)\varphi_m(t)dt = 0 \text{ при } k \neq m, \quad (3.4)$$

а для комплексных функций

$$\int_a^b \varphi_k(t)\varphi_m^*(t)dt = 0 \text{ при } k \neq m, \quad (3.5)$$

где $\varphi_m^*(t)$ – комплексно-сопряженная функция с $\varphi_m(t)$ на этом интервале $[a, b]$:

$$\int_a^b \varphi_k^2(t) dt \neq 0. \quad (3.6)$$

Для разложения функции $s(t)$ в ряд (3.1) необходимо выполнение условия

$$\int_a^b |s(t)| dt < \infty. \quad (3.7)$$

В случае, если для всех действительных функций $\varphi_k(t)$

$$\|\varphi_k(t)\|^2 = \int_a^b \varphi_k^2(t) dt = 1, \quad (3.8)$$

а для комплексных –

$$\|\varphi_k(t)\|^2 = \int_a^b \varphi_k(t) \varphi_k^*(t) dt = 1, \quad (3.9)$$

то их называют нормированными функциями, а система нормированных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \dots$, в которой все различные пары взаимно ортогональны, называется ортонормированной системой. Данными свойствами обладают разные системы функций: тригонометрические функции, полиномы Чебышева, Эрмита, Лагерра, Лежандра, функции Уолша и многие другие.

Ряд (3.1), построенный на базе ортонормированных функций, называется обобщенным рядом Фурье.

Тригонометрический ряд Фурье

В действующих системах связи в силу частого использования гармонических сигналов для удобства анализа, как правило, используется базис ортонормированных гармонических функций $\sin(t)$ и $\cos(t)$, на которых строится **тригонометрический ряд Фурье**.

В данных рядах используются базисные функции:

$$\cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos k\omega_1 t, \dots, \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin k\omega_1 t, \dots; \quad (3.10)$$

$$e^{-j\omega_1 t}, e^{-j2\omega_1 t}, \dots, e^{-jk\omega_1 t} \dots \quad (3.11)$$

Эти функции имеют интервал ортогональности [\[см. формулы \(3.4\), \(3.5\)\]](#), совпадающий с периодом гармонической функции $s(t)$ $T_c = 2\pi/\omega_1$.

Система функций (3.10) соответствует тригонометрической форме ряда Фурье, а система (3.11) – комплексной форме. Между данными формами ряда Фурье существует простая связь.

В полученном на базе функций (3.10) или (3.11) ряде Фурье (3.1) совокупность коэффициентов c_k называют **частотным спектром** гармонического сигнала $s(t)$.

Тригонометрический ряд Фурье применяется для спектрального анализа периодических сигналов $s(t)$ (с периодом T_c) в виде **ряда синусно-косинусной формы**:

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad (3.12)$$

где ω_1 – круговая частота первой гармоники спектра; $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_c}$,

a_k и b_k – коэффициенты гармоник:

$$a_0 = \frac{1}{T_c} \int_{-\frac{T_c}{2}}^{\frac{T_c}{2}} s(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T_c} \int_{-\frac{T_c}{2}}^{\frac{T_c}{2}} s(t) \cos k\omega_1 t dt, \quad b_k = \frac{2}{T_c} \int_{-\frac{T_c}{2}}^{\frac{T_c}{2}} s(t) \sin k\omega_1 t dt. \quad (3.13)$$

Для удобства анализа используется другая форма ряда Фурье в **вещественном виде**, полученная путем тригонометрических преобразований выражения (3.12):

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k), \quad (3.14)$$

где A_k – амплитуда гармоники сигнала (**рис. 3.1**);

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad (3.15)$$

φ_k – фаза гармоники сигнала (**см. рис. 3.1**);

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}. \quad (3.16)$$

Обратный переход к коэффициентам a_k и b_k осуществляется по формулам

$$a_k = A_k \cos \varphi_k; \quad b_k = A_k \sin \varphi_k. \quad (3.17)$$

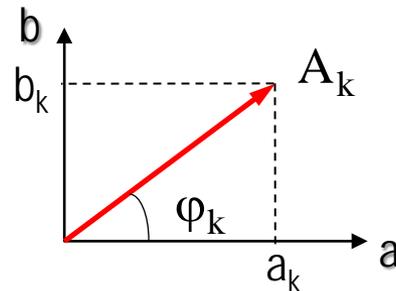


Рис. 3.1. Векторное представление амплитуды гармоники вещественного ряда Фурье

В некоторых случаях удобнее рассматривать ряд Фурье в **комплексном** виде (как двухсторонний спектр), который получен из формулы Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha :$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{-j\alpha} + e^{j\alpha}). \quad (3.18)$$

С учетом (3.18) вещественный ряд Фурье (3.14) примет комплексный вид:

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (3.19)$$

где $\dot{C}_k = \frac{\dot{A}_k}{2}$; $\dot{A}_k = A_k e^{j\varphi_k} = a_k + jb_k$; (3.20)

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T_c} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} s(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (3.21)$$

Рассмотрим пример разложения в ряд Фурье типовой периодической последовательности прямоугольных импульсов в виде меандра (рис. 3.2).

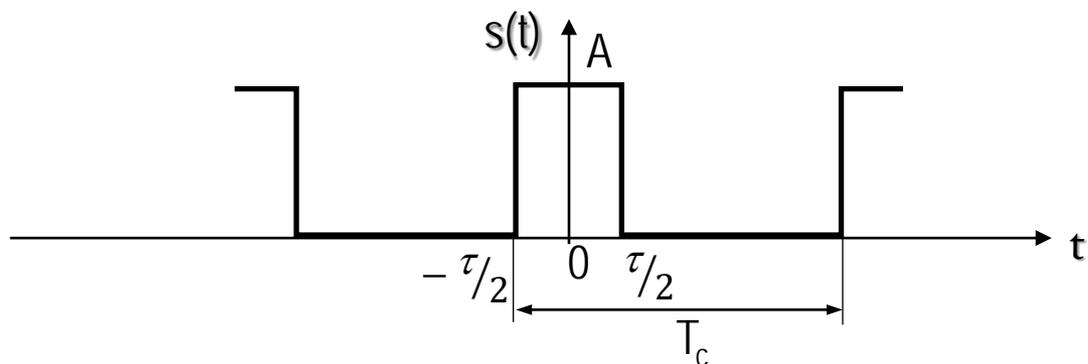


Рис. 3.2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Функция $s(t)$ является четной, поэтому удобнее использовать синусо-косинусное представление ряда Фурье, состоящего только из коэффициентов a_k :

$$a_k = \frac{2A}{T_c} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos k\omega_1 t \, dt = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{T_c}\right). \quad (3.22)$$

Введем параметр $q = T_c/\tau$, который называется **скважностью сигнала**. Он определяет долю отсутствия сигнала в течение его периода T_c (см. рис. 3.2). С учетом этого

$$a_k = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) = \frac{2A}{q} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)}{\frac{\pi k}{q}}. \quad (3.23)$$

Значение

$$a_0 = \frac{1}{T_c} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} s(t) dt = \frac{A\tau}{T_c} = \frac{A}{q}. \quad (3.24)$$

Тогда

$$s(t) = \frac{A}{q} + \frac{2A}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)}{\frac{\pi k}{q}} \cos\left(\frac{2\pi k}{T_c} t\right). \quad (3.25)$$

Представим полученный ряд Фурье (3.25) в виде частотного комплексного спектра, определяющегося комплексными коэффициентами гармоник \dot{C}_k , амплитуды значений которых с учетом четности сигнала $s(t)$ и выражения (3.19) будут равны $C_k=0,5A_k=0,5a_k$. График данного спектра показан на рис. 3.3, где на шкале абсцисс указаны номера гармоник k , а на шкале ординат – соответствующие амплитуды гармоник C_k .

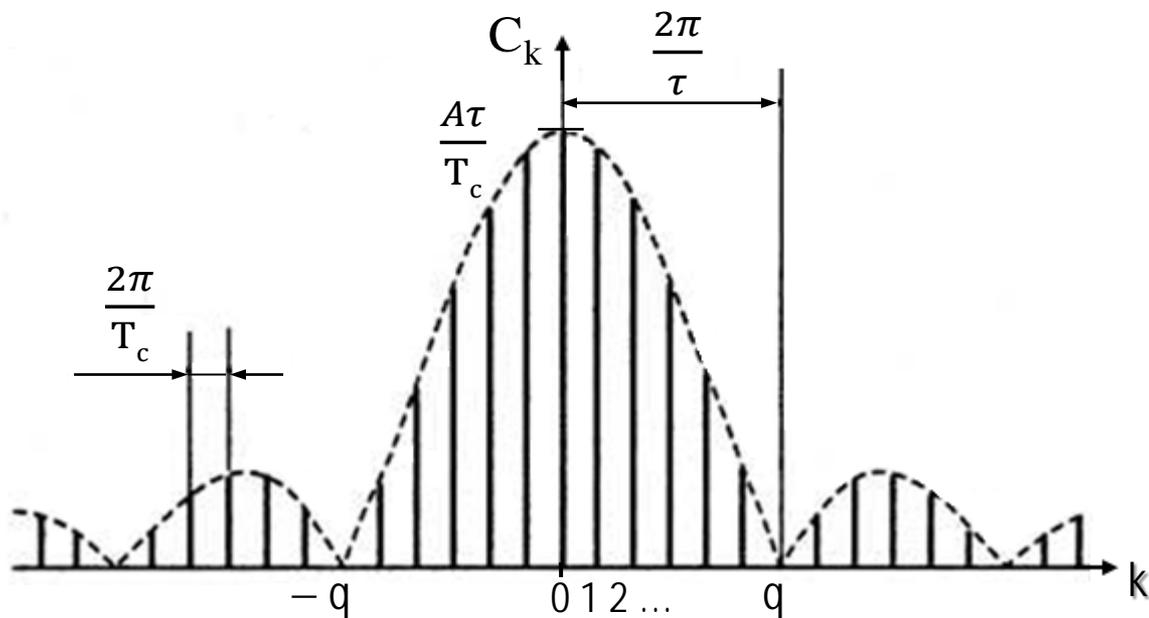


Рис. 3.3. Амплитудный комплексный спектр прямоугольного сигнала

При скважности $q=2$ сигнал $s(t)$ перейдет в меандр (рис. 3.4), спектры которого в разных формах показаны на рис. 3.5.

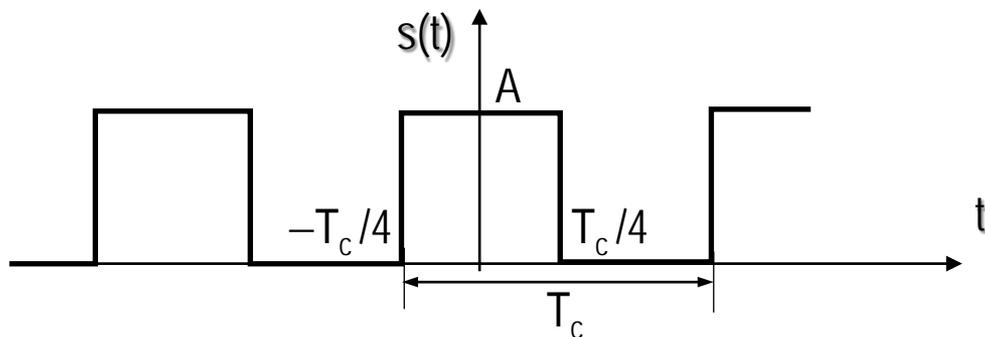


Рис. 3.4. Периодический сигнал со скважностью $q=2$

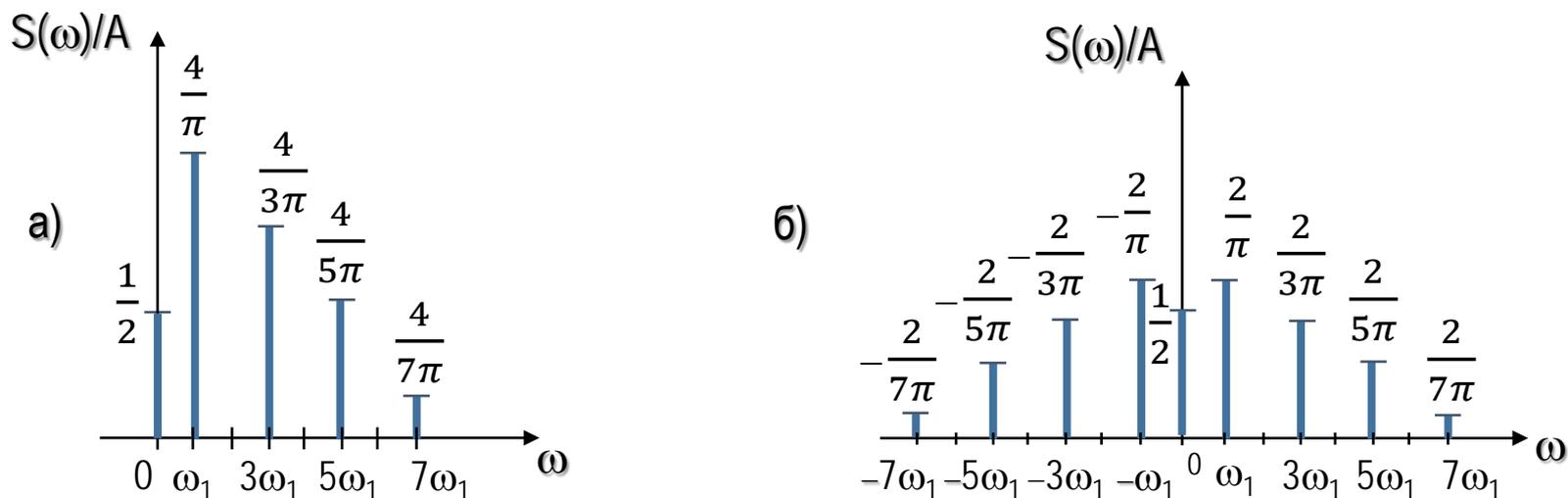


Рис. 3.5. Разложение сигнала в ряд Фурье (нормированные амплитуды коэффициентов):
 а – тригонометрический вещественный; б – комплексный

3.2. Спектральное представление неперiodических функций

Если сигнал не является периодической функцией и задан только на интервале времени $(-T_c/2; T_c/2)$, то для спектрального представления его можно разложить в ряд Фурье при условии, что период $T_c \rightarrow \infty$ (рис. 3.6). В этом случае расстояние между гармониками будет равно нулю: $\omega_1 = 2\pi/T_c \rightarrow 0$, что преобразует ряд Фурье (3.19) в сплошной спектр, для определения которого вычислим пределы выражений

$$\left\{ \begin{aligned} S(j\omega) &= \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \dot{C}_k = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1} s(t) e^{-jk\omega_1 t} dt; \\ s(t) &= \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1} s(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \right] e^{jk\omega_1 t} \omega_1. \end{aligned} \right. \quad (3.26)$$

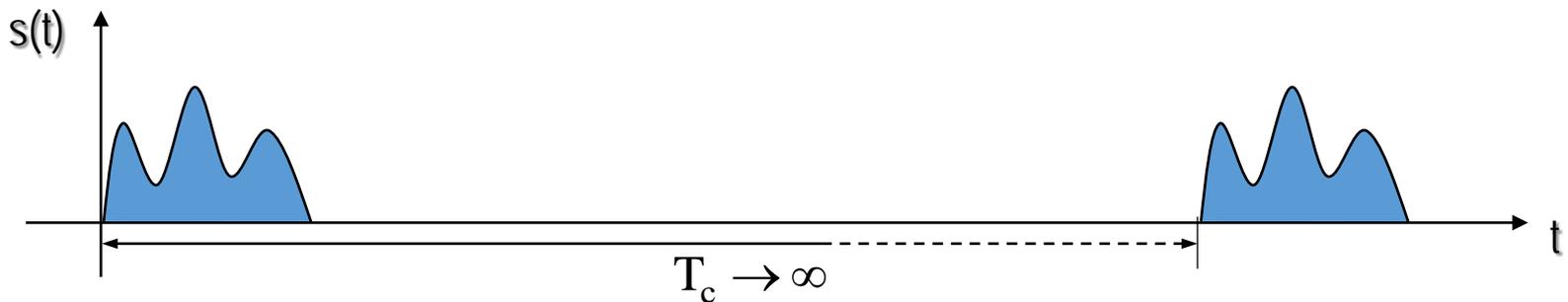


Рис. 3.6. Пояснение к спектру неперiodического сигнала

С учетом того, что $\omega_1 \rightarrow 0$, при решении пределов в (3.26) произведен переход из суммы к интегралу с непрерывной переменной $k\omega_1 \rightarrow \omega$ и дифференциалу $\omega_1 \rightarrow d\omega$, в результате чего получена пара преобразований Фурье для спектрального анализа непериодических сигналов:

$$\left. \begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{прямое преобразование}); \\ s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{обратное преобразование}), \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

где $S(j\omega)$ – комплексный спектр сигнала:

$$S(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = S(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}. \quad (3.28)$$

В выражении (3.28) $A(\omega)$ – это действительная, а $B(\omega)$ – мнимая части спектра сигнала, определяемые выражениями

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt; \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt, \quad (3.29)$$

$$\text{а} \quad \left. \begin{aligned} S(\omega) &= \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2} \quad \text{– амплитудный спектр}; \\ \varphi(\omega) &= \arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \quad \text{– фазовый спектр.} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

На рис. 3.7–3.8 и в табл. 3.1 в качестве примера приведены спектры типовых непериодических сигналов.

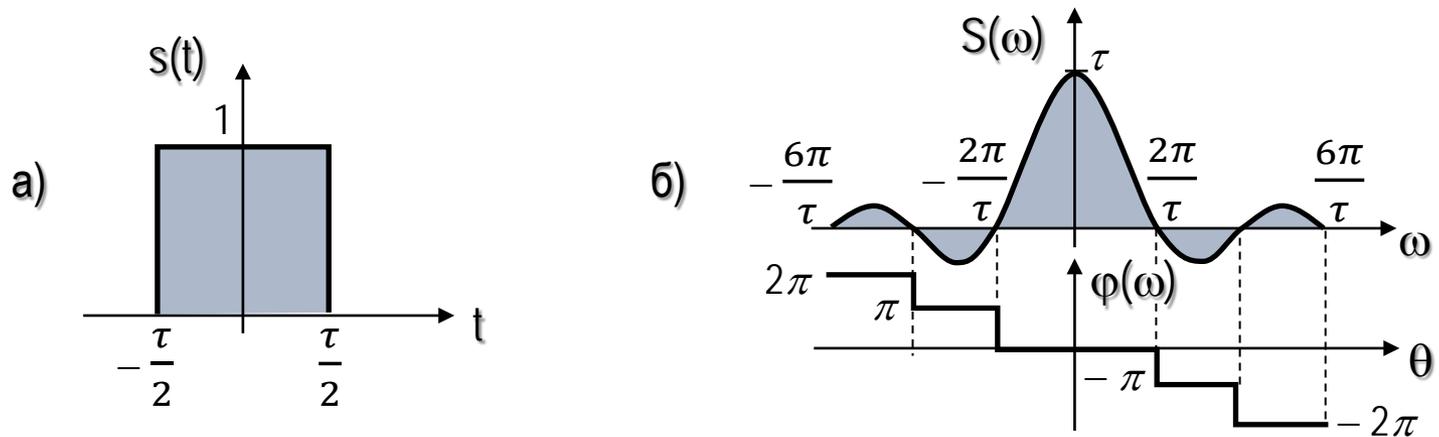


Рис. 3.7. Пример разложения прямоугольного сигнала в спектр:
 а – сигнал; б – спектральная плотность сигнала (амплитудный и фазовый спектры)

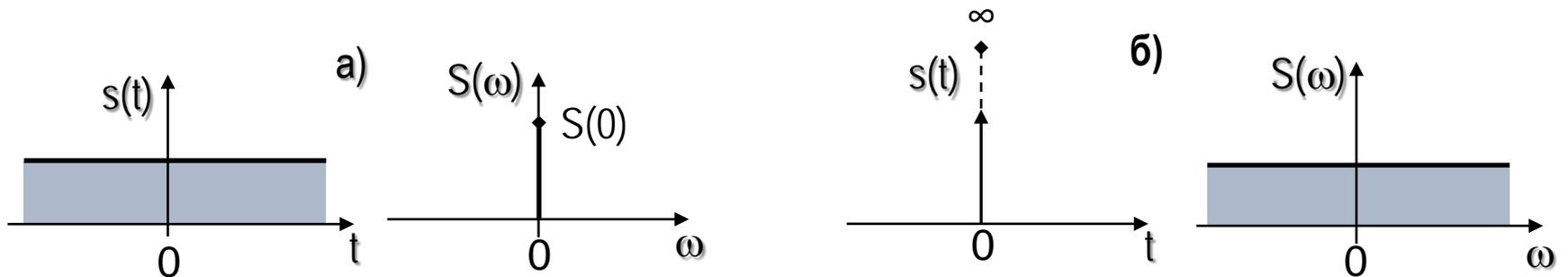
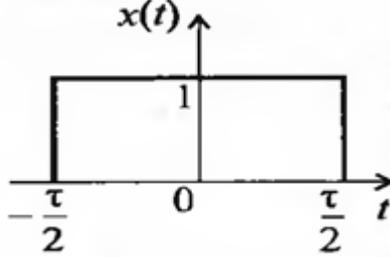
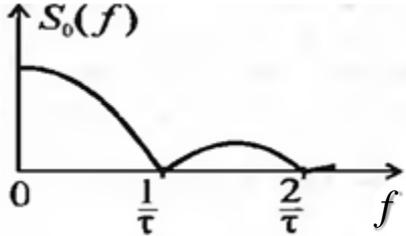
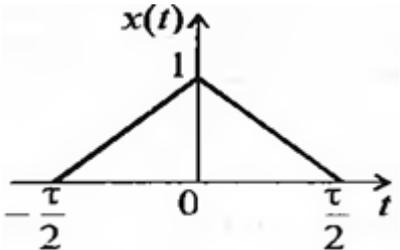
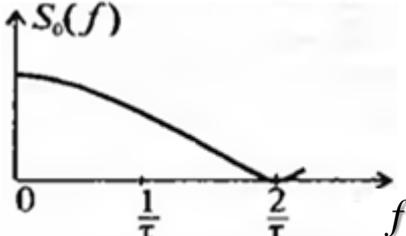
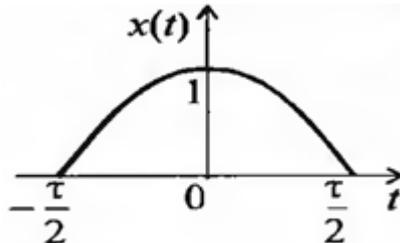
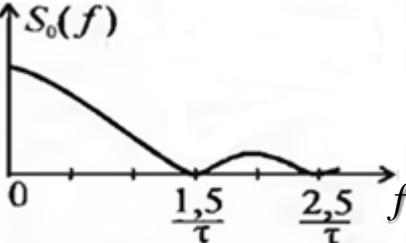
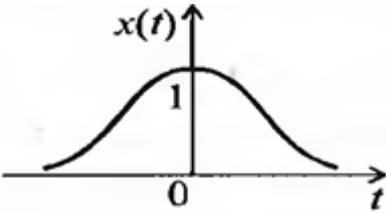
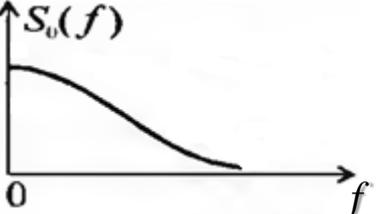
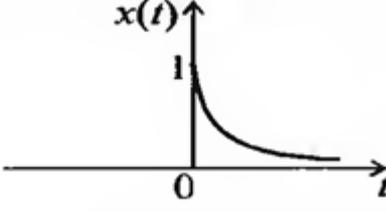
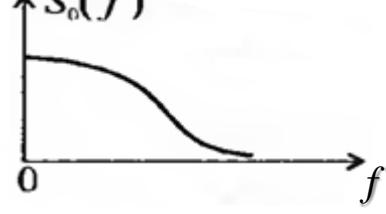


Рис. 3.8. Амплитудный спектр: а – сигнала постоянного тока; б – дельта-функции

Примеры спектров непериодических сигналов

№ п/п	Сигнал $x(t)$		Спектральная плотность $S(f)$	Амплитудный спектр $S_0(f)$
1	$x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq \frac{\tau}{2}; \\ 0, & t > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$		$\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$	
2	$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2 t }{\tau}, & t \leq \frac{\tau}{2}; \\ 0, & t > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$		$\frac{\tau}{2} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\frac{\omega\tau}{4}}$	
3	$x(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t), & t \leq \frac{\tau}{2}; \\ 0, & t > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$		$\frac{4\tau}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$	

Продолжение таблицы 3.1

№ п/п	Сигнал $x(t)$		Спектральная плотность $S(f)$	Амплитудный спектр $S_0(f)$
4	$x(t) = e^{-(\beta t)^2}$		$\frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\left(\frac{\omega}{2\beta}\right)^2}$	
5	$x(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$		$\frac{1}{\beta + j\omega}$	



3.3. Свойства преобразования Фурье

Рассмотрим основные свойства преобразований Фурье.

На практике чаще всего используются операции сдвига сигналов во времени, изменение масштаба времени и сдвиг спектра сигнала по частоте. Также часто при обработке сигналов применяются операции сложения и умножения сигналов и их свертка.

Сдвиг сигнала во времени

Если задан произвольный непрерывный сигнал $s_1(t)$ на интервале времени от t_1 до t_2 со спектральной плотностью $S_1(j\omega)$, то задержанный сигнал на время t_0 при сохранении формы (рис. 3.9) представляется выражением

$$s_2(t) = s_1(t - t_0). \quad (3.31)$$

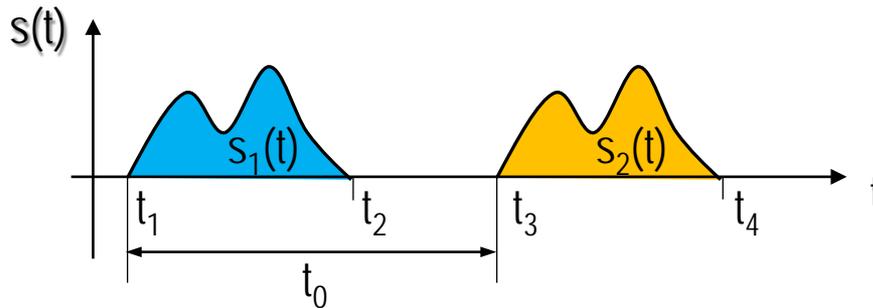


Рис. 3.9. Пояснение к сдвигу сигнала во времени

Задержанный сигнал $s_2(t)$ будет определен на сдвинутом интервале от $t_3=t_1+t_0$ до $t_4=t_2+t_0$.

Определим спектральную плотность сигнала $s_2(t)$:

$$S_2(j\omega) = \int_{t_3}^{t_4} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_1(t-t_0) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.32)$$

Вводя новую переменную $\tau=t-t_0$, получим

$$S_2(j\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s_1(\tau) e^{-j\omega(\tau-t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{t_1}^{t_2} s_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} S_1(j\omega). \quad (3.33)$$

Из (3.33) следует, что при сдвиге сигнала на величину $\pm t_0$ спектральная плотность задержанного сигнала определяется спектром исходного сигнала со сдвигом фазы на величину $\pm\omega t_0$, то есть амплитудно-частотная характеристика спектра $S(\omega)$ не зависит от временного положения сигнала.

Из вышерассмотренного свойства следует и обратное утверждение: сдвигу фазы всех спектральных составляющих спектра сигнала $s(t)$ на величину $\theta(\omega) = \pm\omega t_0$ соответствует задержанный сигнал $s(t)$ на время $\pm t_0$.

Изменение масштаба времени

Рассмотрим случай, когда задан произвольный непрерывный сигнал $s_1(t)$ со спектральной плотностью $S_1(j\omega)$. Если произвести его сжатие во времени в n раз с сохранением формы, то получим новый сигнал, связанный с исходным (рис. 3.10):

$$s_2(t) = s_1(nt), \quad n > 1. \quad (3.34)$$

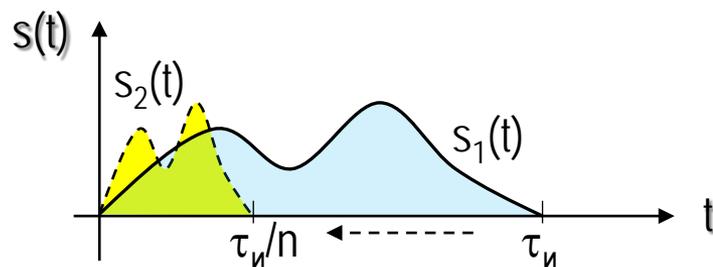


Рис. 3.10. Пояснение сжатия сигнала в масштабе времени

Длительность сжатого импульса $s_2(t)$ (см. рис. 3.10) будет в n раз меньше длительности исходного сигнала $s_1(t)$. Определим его спектральную плотность:

$$S_2(j\omega) = \int_0^{\tau_n/n} s_2(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau_n/n} s_1(nt)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.35)$$

Заменим в (3.35) переменную $\tau=nt$, в результате получим

$$S_2(j\omega) = \frac{1}{n} \int_0^{\tau_n} s_1(\tau) e^{-j\frac{\omega}{n}\tau} dt = \frac{1}{n} S_1(j\omega/n). \quad (3.36)$$

Таким образом, сжатие сигнала в масштабе времени в n раз приводит к расширению спектра исходного сигнала в n раз. Кроме того, происходит пропорциональное уменьшение в n раз амплитуды спектральной плотности исходного сигнала (рис. 3.11).

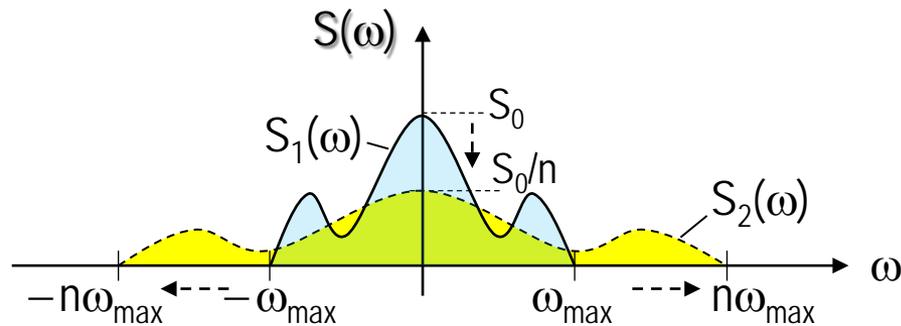


Рис. 3.11. Изменение спектра при сжатии сигнала в масштабе времени

Очевидно, что при растяжении сигнала во времени (эквивалентно случаю, когда $n < 1$) произойдут обратные преобразования спектра: при растяжении сигнала в m раз произойдет сужение спектра сигнала в m раз и во столько же раз возрастет его амплитуда: $S_2(\omega) = mS_1(m\omega)$.

Смещение спектра полосового сигнала

В системах радиосвязи часто выполняется операция смещения ограниченного спектра $S_1(\omega)$ сигнала $s(t)$ по частоте, например, при модуляции сигнала на несущей частоте ω_0 . Такая операция определяется выражением

$$s_2(t) = s_1(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (3.37)$$

где θ_0 – начальная фаза сигнала смещения.

Определим спектр сигнала $s_2(t)$:

$$\begin{aligned} S_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \left[e^{j\omega_0 t + \theta_0} + e^{-j\omega_0 t + \theta_0} \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{e^{j\theta_0}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{e^{-j\theta_0}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \\ &= \frac{e^{j\theta_0}}{2} S_1(\omega - \omega_0) + \frac{e^{-j\theta_0}}{2} S_1(\omega + \omega_0). \end{aligned} \quad (3.38)$$

В частности, при $\theta_0=0$ выражение (3.38) примет вид

$$S_2(j\omega) = \frac{1}{2} S_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} S_1(\omega + \omega_0). \quad (3.39)$$

Таким образом, при умножении сигнала $s_1(t)$ на гармоническую функцию $\cos(\omega_0 t + \theta_0)$ происходит расщепление спектра исходного сигнала $S(\omega)$ на два комплексно-сопряженных исходных спектра, зеркально смещенных на частоты $\pm\omega_0$ (рис. 3.12).

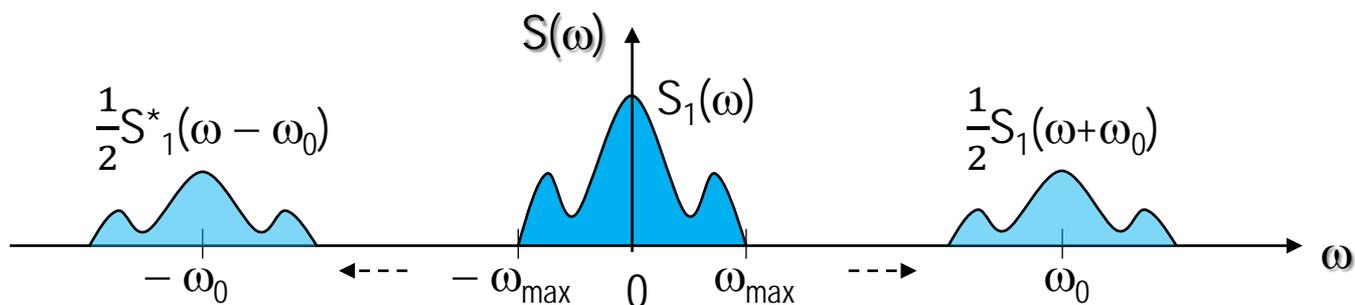


Рис. 3.12. Пояснение смещения спектра полосового сигнала

Спектр суммы сигналов

С учетом линейности операции прямого преобразования Фурье (3.27), спектр суммы сигналов

$$s_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) \quad (3.40)$$

будет определяться суммой спектров каждого сигнала:

$$S_{\Sigma}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N s_i(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=1}^N S_i(j\omega). \quad (3.41)$$

Спектр произведения сигналов

Рассмотрим случай, когда сигнал $s(t)$ задан произведением двух функций $f(t)$ и $g(t)$:

$$s(t) = f(t)h(t). \quad (3.42)$$

Определим спектральную плотность данного произведения:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.43)$$

Выразим функцию $h(t)$ в **(3.42)** через ее спектр:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.44)$$

Заменив в выражении **(3.44)** переменную ω на ν , подставим его в формулу **(3.43)**. В результате получим

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(j\nu)e^{j\nu t} d\nu \right] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\nu) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j(\omega-\nu)t} dt \right] d\nu. \quad (3.45)$$

Интеграл по переменной t в скобках выражения **(3.45)** – это спектральная плотность функции $f(t)$ на частоте $\omega - \nu$: $F(\omega - \nu)$. На основании этого выражение **(3.45)** можно представить в виде

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\nu)F[j(\omega - \nu)]d\nu. \quad (3.46)$$

В результате спектр произведения определяется сверткой спектров умножаемых функций $H(\omega)$ и $F(\omega)$ с коэффициентом $1/2\pi$.

Рассмотрим частный случай **(3.46)** при $\omega=0$:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\nu)F(-j\nu)d\nu. \quad (3.47)$$

Заменяя переменную ν на ω в **(3.47)**, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)F(-j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)F^*(j\omega)d\omega, \quad (3.48)$$

где $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$ – комплексно-сопряженный спектр спектральной функции $F(j\omega)$.

Спектр свертки сигналов

Рассмотрим спектр свертки сигналов

$$s_{CB}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t - \tau)d\tau. \quad (3.49)$$

С учетом свойства задержанной функции [\(3.33\)](#) и выражения [\(3.46\)](#) свертка [\(3.49\)](#) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t - \tau)d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \quad (3.50)$$

Исходя из того, что правая часть выражения [\(3.50\)](#) – это обратное преобразование Фурье произведения $F(j\omega)H(j\omega)$, следует, что спектр свертки определяется произведением спектров функций $f(t)$ и $h(t)$:

$$S_{CB}(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega). \quad (3.51)$$

Перечень контрольных вопросов:

1. [Обобщенный ряд Фурье.](#)
2. [Разложение периодических сигналов в тригонометрический ряд Фурье.](#)
3. [Разложение периодических сигналов в вещественный ряд Фурье.](#)
4. [Разложение периодических сигналов в комплексный ряд Фурье.](#)
5. [Определение спектра непериодических сигналов.](#)
6. [Свойства преобразования Фурье.](#)

4. Разложение сигналов во временной ряд Котельникова

Учебные цели.

Изучить: способы разложения сигналов во временной ряд Котельникова и граничные условия для реализации метода АЦП сигналов; принцип ЦАП и ограничения при реализации преобразования.

4.1. Теорема отсчетов (Котельникова)

На практике все реальные сигналы имеют ограниченный спектр частот, что позволяет разложить сигнал $s(t)$ во временной ряд.

Теорема Котельникова (теорема отсчетов)

Непрерывная функция $s(t)$ с ограниченным спектром частот (с максимальной частотой F_m) полностью определяется последовательностью своих мгновенных значений в моменты, отстоящие друг от друга на интервале времени $T \leq 1/2F_m$ (рис. 4.1).

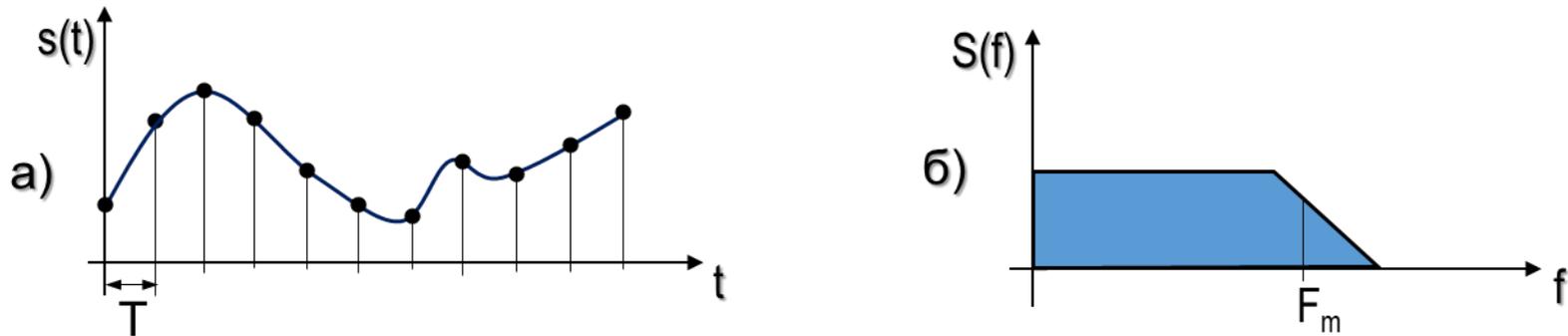


Рис. 4.1. Пояснение к теореме Котельникова: а – сигнал в масштабе времени; б – спектр сигнала

В соответствии с теоремой отсчетов любой непрерывный сигнал $s(t)$, ограниченный по спектру максимальной частотой F_m , можно разложить во временной ряд, получивший название ряда Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT)\varphi_k(t), \quad (4.1)$$

где $s(kT)$ – отсчеты напряжения сигнала $s(t)$ через период дискретизации T (см. рис. 4.1); $\varphi_k(t)$ – функция отсчетов:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin[\omega_m(t - kT)]}{\omega_m(t - kT)}; \quad (4.2)$$

$\omega_m = 2\pi F_m$ – круговая частота, соответствующая максимальной частоте спектра аналогового сигнала $s(t)$.

Свойство функции отсчетов

При различных значениях k функции отсчетов $\varphi_k(t)$ будут взаимно ортогональными (рис. 4.2), так как

$$\left. \begin{aligned} \varphi_r(t) &= \frac{\sin[\omega_m(t - kT)]}{\omega_m(t - kT)} = 1 \text{ при } k = r; \\ \varphi_r(t) &= \frac{\sin[\omega_m(t - kT)]}{\omega_m(t - kT)} = 0 \text{ при } k \neq r. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

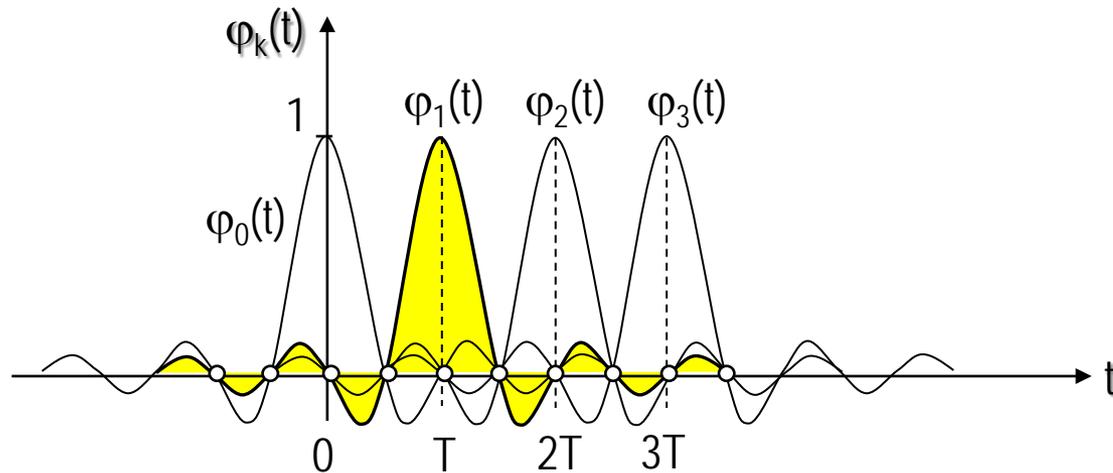


Рис. 4.2. Пояснение об ортогональности функций отсчетов

Проведем доказательство теоремы отсчетов.

Пусть функция $s(t)$ имеет ограниченный комплексный спектр (рис. 4.3, а):

$$S(j\omega) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt & \text{при } |\omega| \leq \omega_m; \\ 0 & \text{при } |\omega| > \omega_m. \end{cases} \quad (4.4)$$

Определим спектр функций отсчетов $\phi_k(t)$. Так как эта функция непрерывна, то ее спектр определяется прямым преобразованием Фурье (рис. 4.3, б):

$$\Phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_m (t - kT)}{\omega_m (t - kT)} e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} T e^{-jkT\omega}, & |\omega| \leq \omega_m; \\ 0, & |\omega| > \omega_m. \end{cases} \quad (4.5)$$

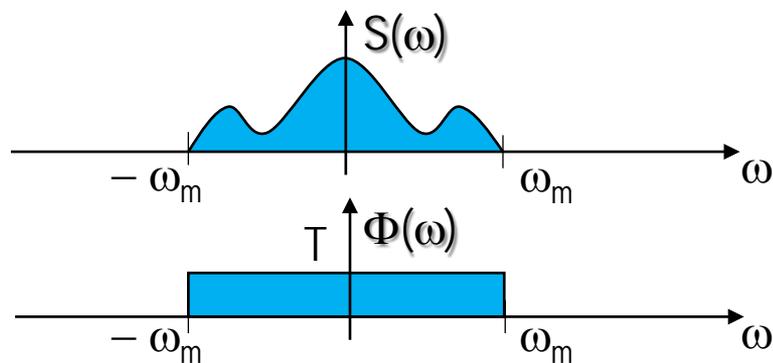


Рис. 4.3. Спектры: а – сигнала; б – функции отсчетов

Из **рис. 4.3** видно, что ширина спектров сигнала и функции отсчетов совпадает. Спектр функции отсчетов в отличие от спектра сигнала имеет равномерный характер со спектральной плотностью, равной периоду дискретизации T . В соответствии с **(4.5)** спектры каждой отдельной функции отсчетов будут иметь одинаковый амплитудный спектр (**см. рис. 4.3, б**), но с различным фазовым сдвигом $\theta(\omega) = kT\omega$.

Согласно выражению **(4.1)** сигнал $s(t)$ разлагается на ортогональные функции отсчетов $\varphi_k(t)$ с периодом T . Следовательно, его можно разложить в обобщенный ряд Фурье **(3.1)** на базовые функции $\varphi_k(t)$:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(t), \quad (4.6)$$

где с учетом, что $\|\varphi_k(t)\|^2 = T$,
$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_k(t) dt. \quad (4.7)$$

Используя свойство преобразования Фурье **(3.48)** и спектра функции отсчетов **(4.5)**, вычислим интеграл в выражении **(4.7)**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_k(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \Phi^*(j\omega) d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(j\omega) e^{jkT\omega} d\omega. \quad (4.8)$$

Подставив вычисленный интеграл **(4.8)** в формулу **(4.7)**, получим

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(j\omega) e^{jkT\omega} d\omega. \quad (4.9)$$

С другой стороны, так как $S(j\omega)$ есть прямое преобразование Фурье сигнала $s(t)$, то обратное преобразование Фурье для $S(j\omega)$, с учетом ограниченности спектра сигнала (**см. рис. 4.3, а**), определяется выражением

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.10)$$

Рассматривая сигнал $s(t)$ в дискретные моменты времени $t=kT$, выражение **(4.10)** можно представить:

$$s(kT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(j\omega) e^{jkT\omega} d\omega. \quad (4.11)$$

Тогда, сравнивая формулу **(4.9)** с **(4.11)**, получим

$$c_k = s(kT). \quad (4.12)$$

В результате из полученного выражения (4.11) следует, что коэффициентами ряда Фурье являются выборочные отсчеты сигнала $s(t)$ в дискретные моменты времени $t=kT$, что доказывает справедливость теоремы отсчетов [см. (4.1)].

4.2. Анализ обратного преобразования дискретизированного сигнала в непрерывный

Согласно теореме Котельникова сигнал можно разложить во временной ряд (4.1), откуда следует, что для преобразования дискретизированного сигнала $s(kT)$ в непрерывный $s(t)$ – цифро-аналогового преобразования (ЦАП) – необходимо сформировать периодическую последовательность сигналов, совпадающих по форме с функцией отсчетов $\phi_k(t)$ с амплитудой, равной значению напряжения отсчета $s(kT)$ (рис. 4.4).

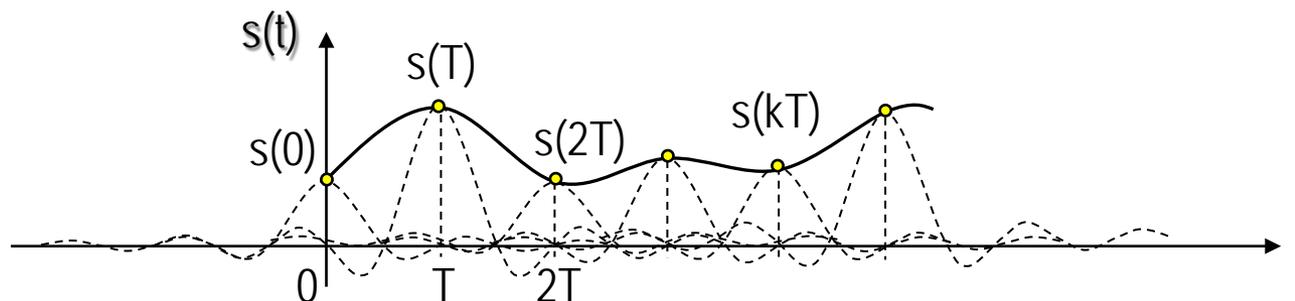


Рис. 4.4. Пояснение принципа преобразования дискретного сигнала в аналоговый

Исходя из спектральной характеристики функции отсчетов ([см. рис. 4.3, б](#)), для формирования базовых ортогональных сигналов можно воспользоваться идеальным фильтром нижних частот (ФНЧ) с заданной полосой пропускания F_m ([рис. 4.5, а](#)), импульсная характеристика которого совпадает с функцией отсчетов ([рис. 4.5, б](#)).

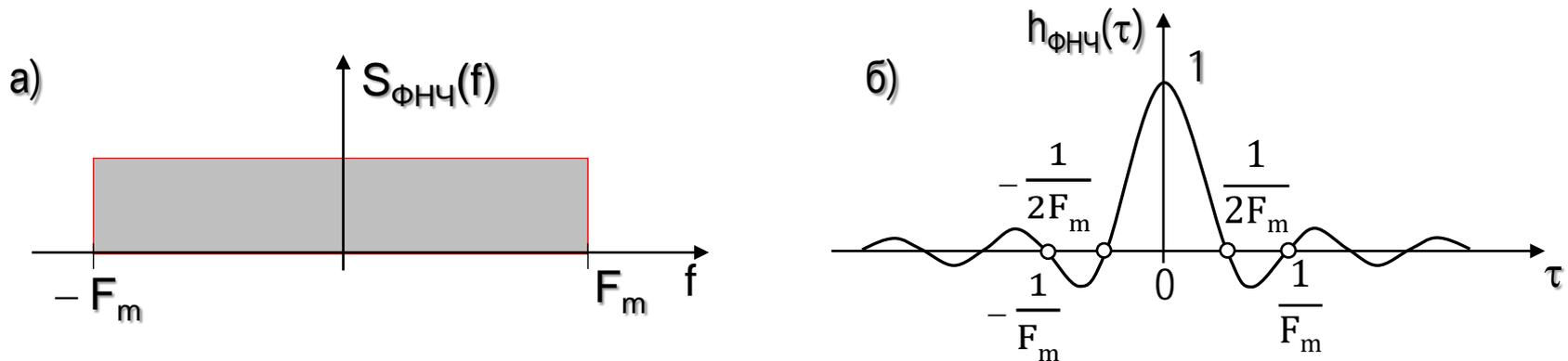


Рис. 4.5. Характеристики идеального фильтра низких частот:
 а – амплитудно-частотная характеристика; б – импульсная характеристика

Однако в этом случае для формирования на выходе такого фильтра сигналов, совпадающих с функцией отсчетов, потребуются на входе импульсы дельта-функций $\delta(t+kT)$ ([рис. 4.6](#)), синтезировать которые практически невозможно. Кроме того, реализовать ФНЧ с идеальной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) также затруднительно.

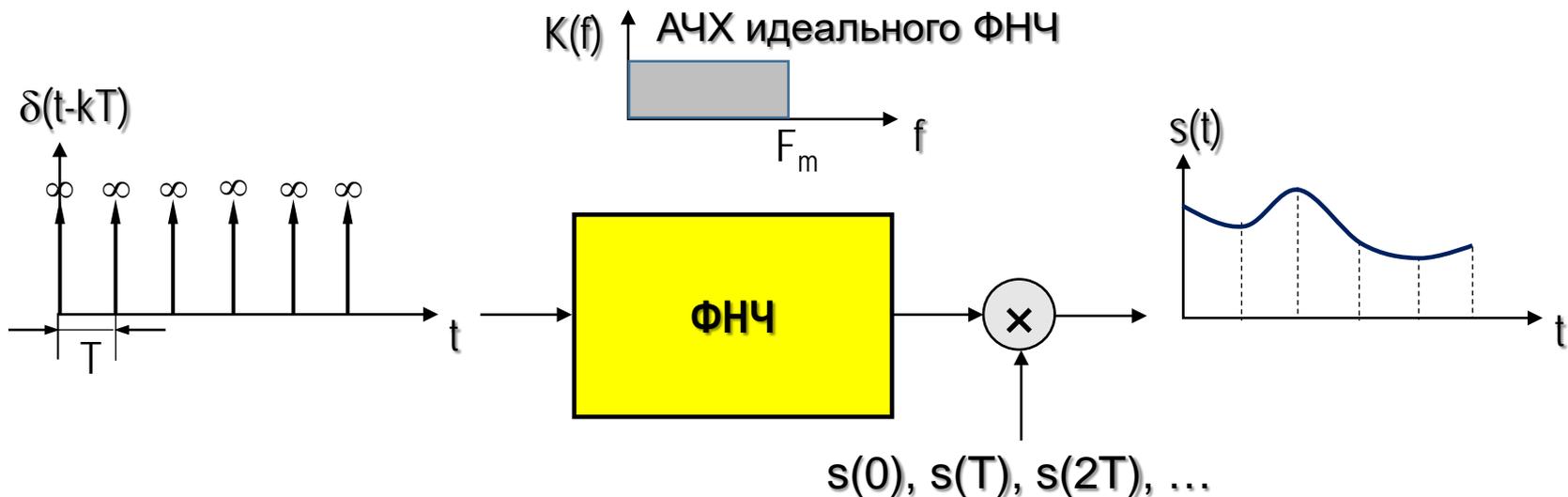


Рис. 4.6. Принцип преобразования дискретного сигнала в аналоговый с помощью дельта-функций $\delta(t - kT)$

В реальных устройствах, выполняющих преобразование дискретного сигнала в аналоговый, используется периодическая последовательность коротких импульсов с большой скважностью и конечной амплитудой U_0 (рис. 4.7), величина которой дает возможность масштабировать формируемые аналоговые сигналы. Однако с учетом неидеальности АЧХ ФНЧ при таком построении ЦАП аналоговый сигнал на его выходе будет формироваться с определенной погрешностью ε , величина которой зависит от параметров импульсов и ФНЧ.

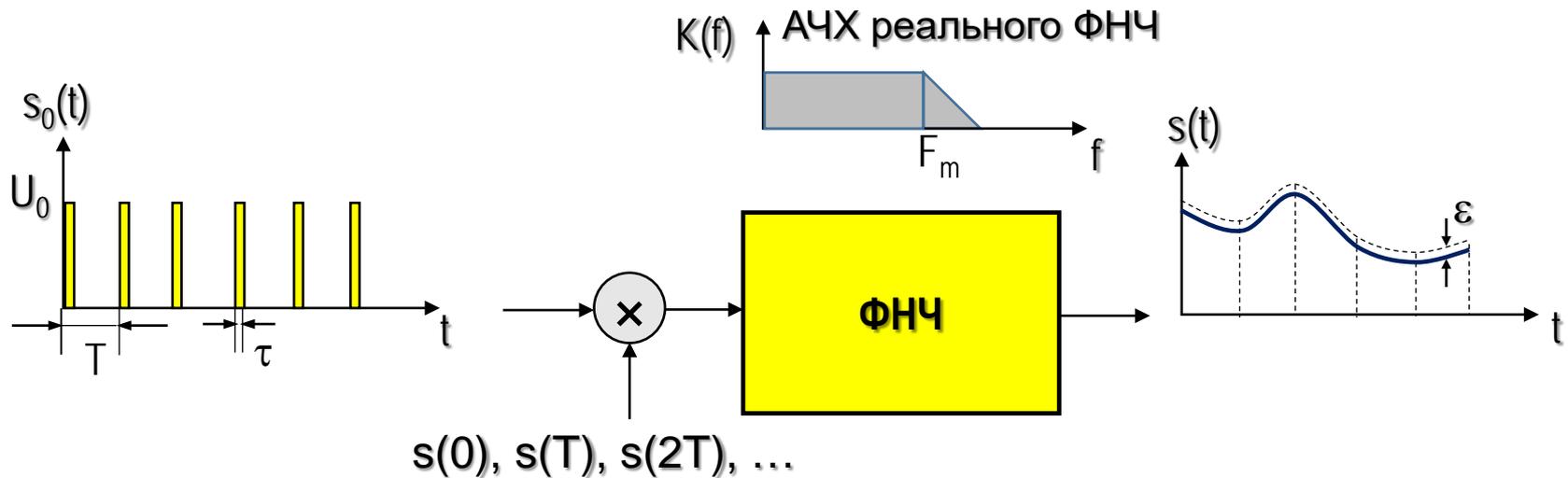


Рис. 4.7. Принцип преобразования дискретного сигнала в аналоговый с помощью периодических импульсов с большой скважностью

Перечень контрольных вопросов:

1. [Разложение аналогово сигнала во временной ряд. Теорема Котельникова.](#)
2. [Основные свойства функции отсчетов.](#)
3. [Принцип цифро-аналогового преобразования сигнала.](#)

5. Спектральный анализ дискретных сигналов

Учебные цели.

Изучить: способы спектрального анализа дискретных сигналов и влияние формы дискретизирующих сигналов на точность определения дискретного спектра; принципы быстрого преобразования Фурье и возможности сокращения вычислительных операций по сравнению с классическим дискретным преобразованием Фурье.

5.1. Преобразование Фурье дискретных сигналов

Для дискретного преобразования Фурье используется дискретная выборка оцифрованных с помощью АЦП аналоговых сигналов ([см. рис. 1.9](#)). Период отсчетов, согласно теореме Котельникова, не должен превышать

$$T \leq \frac{1}{2F_m}, \quad (5.1)$$

где F_m – верхняя граничная частота спектра преобразуемого аналогового сигнала, равная частоте Найквиста F_H .

Для обеспечения качественного преобразования без потерь верхних спектральных составляющих сигнала $s(t)$ на практике период дискретизации берут меньше максимально допустимого $T < T_{\max}$:

$$T \leq \frac{1}{(3 \div 5)F_m}. \quad (5.2)$$

При реализации АЦП процесс дискретизации сигнала строится на снятии отсчетов с помощью коротких импульсов длительностью τ_0 , следующих с периодом дискретизации T (**рис. 5.1**), на основании чего дискретизированный сигнал $s_d(t)$ можно представить:

$$s_d(t) = s(t)y_T(t), \quad (5.3)$$

где $s(t)$ – непрерывная функция сигнала; $y_T(t)$ – тактовая функция, в качестве которой используются короткие периодические импульсы.

В силу периодичности функции $y_T(t)$, ее можно разложить в ряд Фурье:

$$y_T(t) = U_0 \frac{\tau_0}{T} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi\tau_0/T)}{k\pi\tau_0/T} \cos(k\omega_1 t) \right], \quad (5.4)$$

где U_0 – амплитуда импульса; ω_1 – частота его повторения; $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

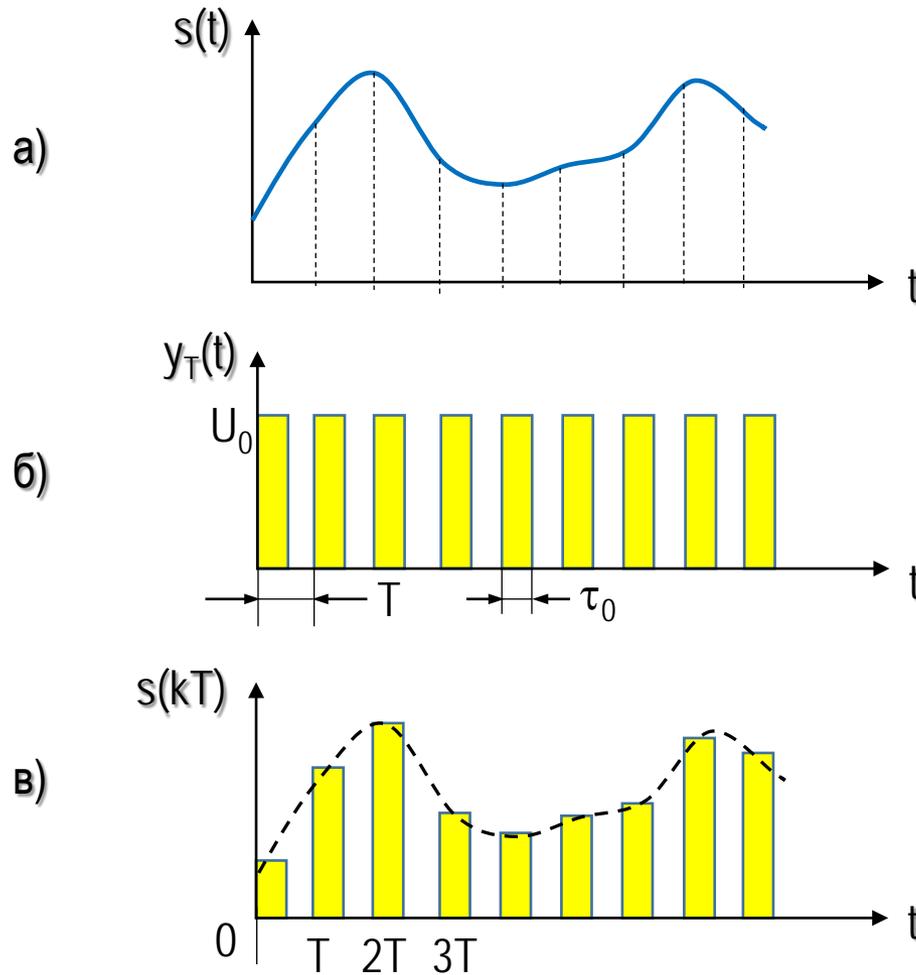


Рис. 5.1. Пояснение дискретизации сигнала импульсами прямоугольной формы:
 а – аналоговый сигнал; б – дискретная последовательность тактовой функции;
 в – дискретизированный сигнал

Тогда, подставив **(5.4)** в формулу **(5.3)**, с учетом, что $k\omega_1\tau_0/2=k\pi\tau_0/T$, дискретизированный сигнал примет вид

$$s_{\text{д}}(t) = U_0 \frac{\tau_0}{T} \left[s(t) + 2s(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi\tau_0/T)}{k\pi\tau_0/T} \cos(k\omega_1 t) \right]. \quad (5.5)$$

В выражении **(5.5)** $s(t)$ – это непрерывный сигнал, следовательно, и вся функция будет как минимум кусочно-непрерывна, на основании чего ее спектр можно получить путем прямого преобразования Фурье:

$$S_{\text{д}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{д}}(t) e^{-j\omega t} dt = U_0 \frac{\tau_0}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi\tau_0/T)}{k\pi\tau_0/T} S(\omega - n\omega_1). \quad (5.6)$$

В выражении **(5.6)** произведен переход первого слагаемого в **(5.5)** под знак суммы, так как при $k=0$ $\sin(kx)/kx=1$, а также учтено свойство смещения спектральной плотности **(3.39)**:

$$\text{- при } k=0: \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(0 \cdot \omega_1 t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = S(\omega),$$

$$\text{- при } k \neq 0: \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(n\omega_1 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} [S(\omega - n\omega_1) + S(\omega + n\omega_1)].$$

Таким образом, спектр сигнала $S_D(\omega)$, дискретизированного короткими прямоугольными импульсами, представляет собой спектр аналогового сигнала $S(\omega)$, повторяющийся с периодом, равным частоте дискретизации ω_D , и убывающей амплитудой пропорционально функции $\sin(k\pi\tau_0/T)/(k\pi\tau_0/T)$ (рис. 5.2).

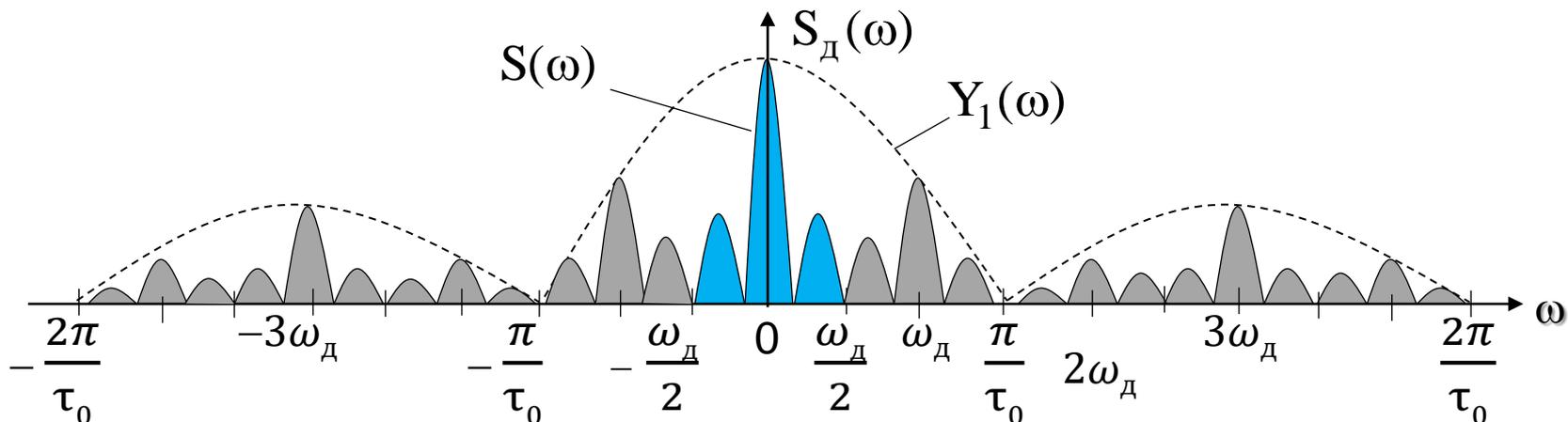


Рис. 5.2. Амплитудный спектр сигнала дискретизированного прямоугольными импульсами

Следует заметить, что огибающая спектра дискретизированного сигнала есть ни что иное, как спектральная плотность одного импульса тактовой функции, нормированного периодом дискретизации T (рис. 5.3):

$$Y_1(j\omega) = U_0 \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} e^{-j\omega t} dt = U_0 \tau_0 \frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2}. \quad (5.7)$$

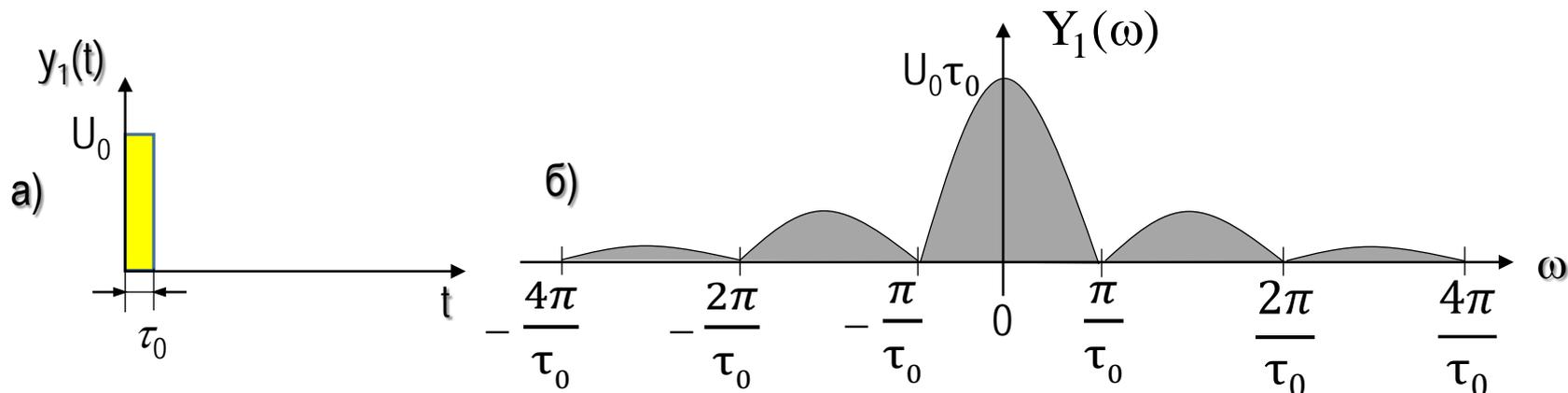


Рис. 5.3. Прямоугольный импульс: а – его временное представление;
б – амплитудный спектр

Анализ спектра дискретизированного сигнала (см. рис. 5.3) показывает, что в случае выполнения условий теоремы Котельникова $T < 1/2F_m$, где F_m – это максимальная частота спектра сигнала $s(t)$, период следования спектров $\omega_d = 2\pi/T$ превышает ширину спектра сигнала $\omega_d > 2\omega_m$. В этих условиях спектры не перекрываются (рис. 5.4), в противном случае при спектральном анализе будут наблюдаться частотные искажения, приводящие к потере верхних частот исходного сигнала.

Также достоверность спектра зависит от параметров тактовой функции $y_T(t)$. Для безыскаженного формирования спектра достаточно обеспечить наибольшую равномерность его огибающей $Y_1(\omega)$ в пределах основной ее части: $-\omega_d/2 \leq \omega \leq \omega_d/2$.

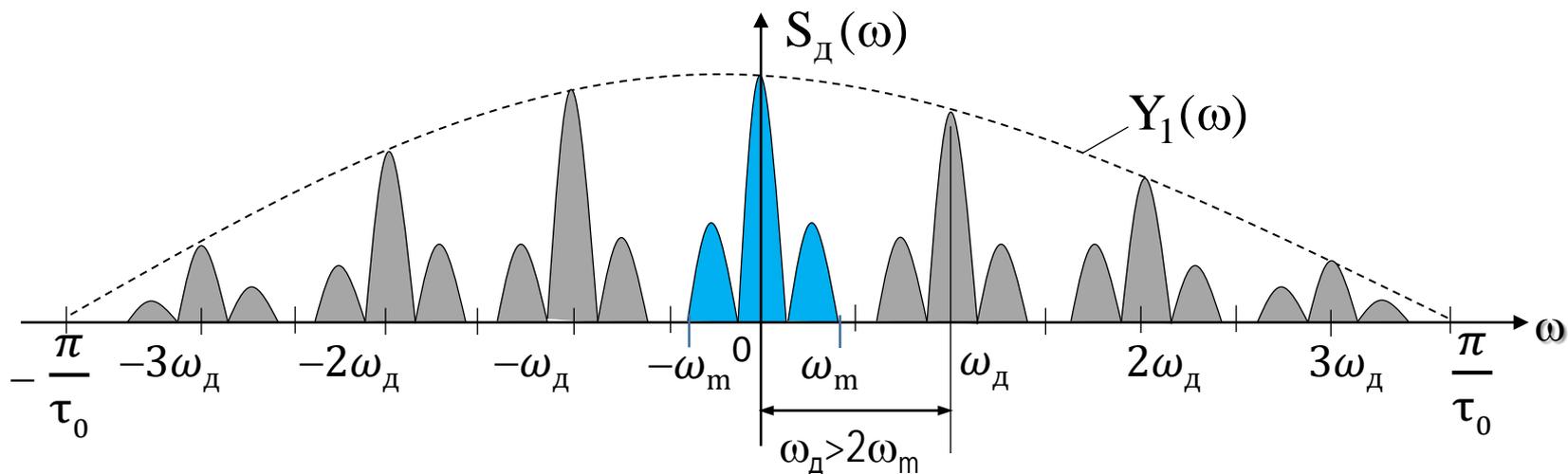


Рис. 5.4. Пояснение к снижению частотных и амплитудных искажений спектра дискретизированного сигнала

Анализируя выражение (5.7), можно заметить, что при сохранении постоянной площади импульса $U_0\tau_0 = 1$, с уменьшением τ_0/T амплитуда лепестков огибающей спектра $Y_1(\omega)$ становится равномернее (см. рис. 5.4), так как сами лепестки расширяются, что снижает искажение спектра $S_d(\omega)$. В пределе при $\tau_0/T \rightarrow 0$ огибающая спектра становится постоянной на всех частотах $-\infty < \omega < \infty$, в результате чего спектр дискретизированного сигнала будет строго периодическим (рис. 5.5).

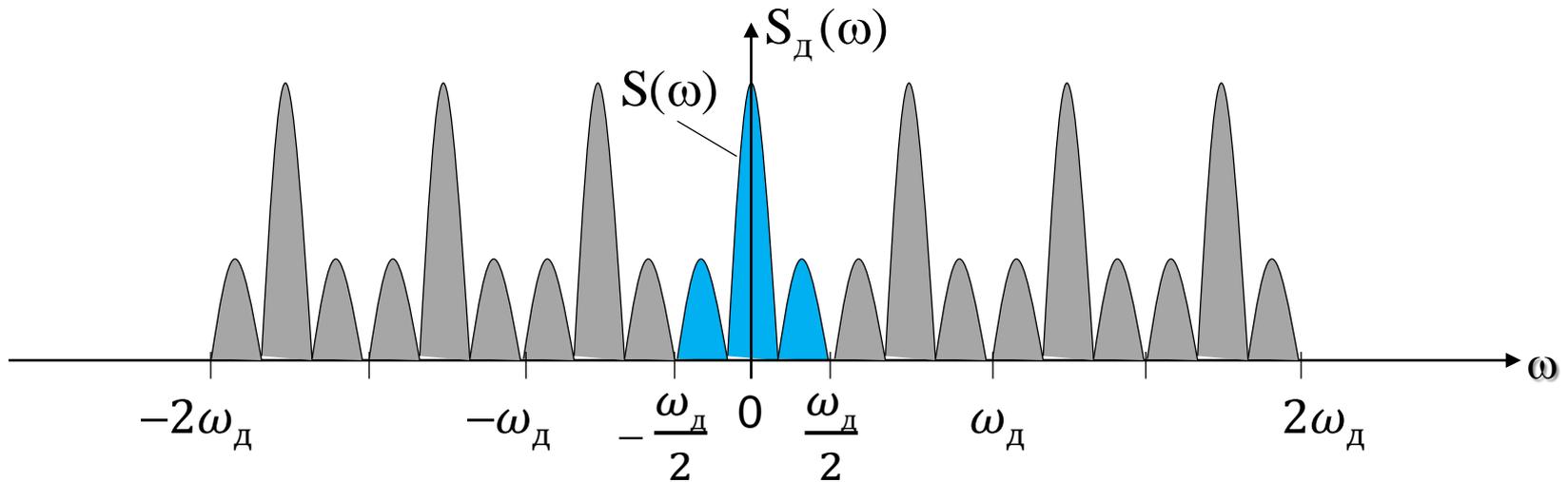


Рис. 5.5. Амплитудный спектр сигнала дискретизированного периодической последовательностью дельта-функций

С учетом, что площадь импульса сохраняется $U_0\tau_0=1$ при $\tau_0 \rightarrow 0$, его амплитуда возрастает до бесконечности $U_0 \rightarrow \infty$. В результате тактовая функция $y_T(t)$ перейдет в сумму сдвинутых на период T дельта-функций (рис. 5.6):

$$y_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (5.8)$$

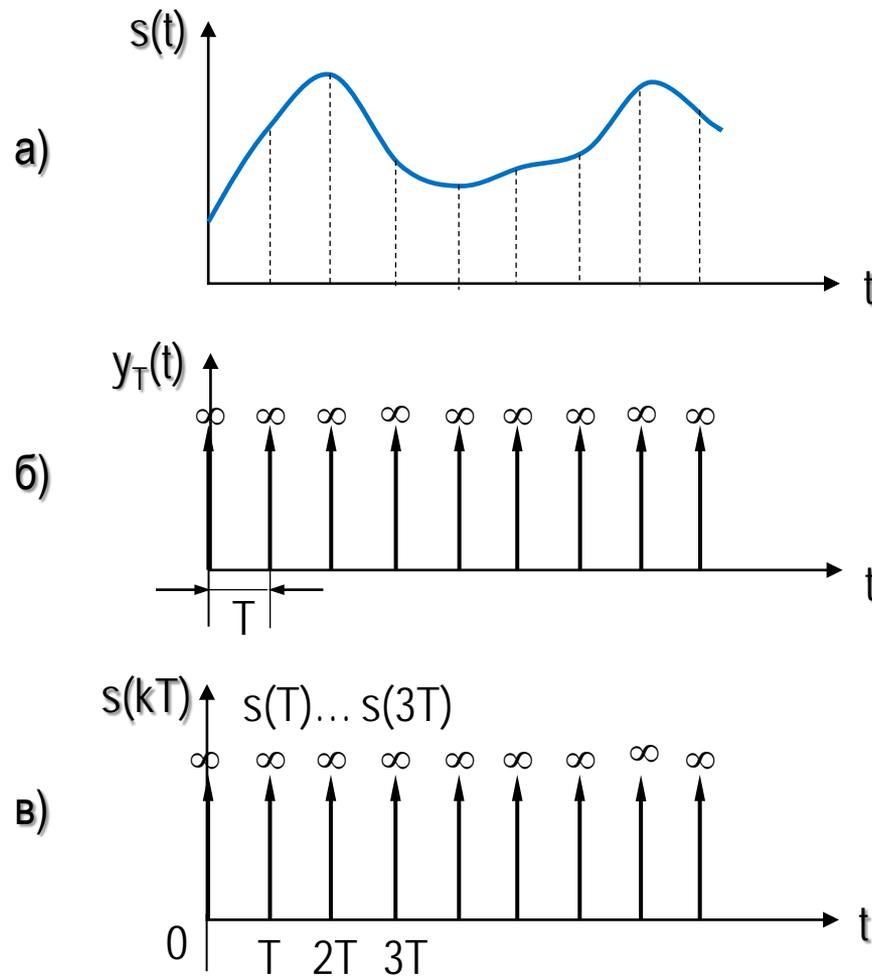


Рис. 5.6. Пояснение дискретизации сигнала дельта-функциями $\delta(t - kT)$:
 а – аналоговый сигнал; б – дискретная последовательность тактовой функции;
 в – дискретизированный сигнал

Тогда с учетом (5.3) выражение для дискретизированного сигнала примет вид:

$$s_{\text{д}}(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (5.9)$$

Дельта-функция $\delta(t)$ имеет определенные свойства (рис. 5.7):

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (5.11)$$

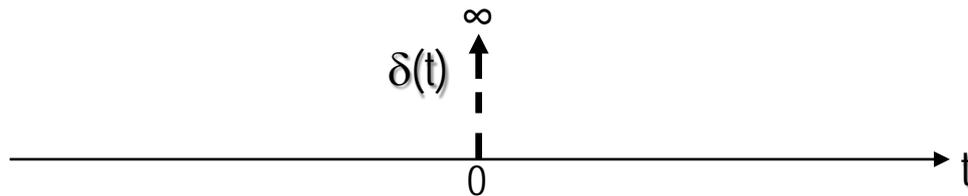


Рис. 5.7. Дельта-функция $\delta(t)$

Исходя из (5.11), дельта-функция обладает фильтрующим свойством свертки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0). \quad (5.12)$$

Так как тактовая функция (5.8) периодическая, с периодом T , то ее можно разложить в комплексный ряд Фурье, все коэффициенты гармоник которых с учетом свойства (5.12) определяются

$$\dot{C}_n = \frac{\dot{A}_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)e^{-jn\omega_d t} dt = \frac{e^0}{T} = \frac{1}{T}, \quad (5.13)$$

где ω_d – круговая частота дискретизации; $\omega_d = \frac{2\pi}{T}$.

Тогда тактовую функцию можно представить в виде комплексного ряда:

$$y_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_d t}. \quad (5.14)$$

Следовательно, с учетом (5.14) дискретная последовательность (5.9) примет вид

$$s_{\text{д}}(t) = \frac{s(t)}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_{\text{д}}t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t)e^{jn\omega_{\text{д}}t}. \quad (5.15)$$

Так как сигнал $s(t)$ является непериодическим, то и функция (5.15) также будет непериодической. Следовательно, ее спектр можно определить путем прямого преобразования Фурье:

$$S_{\text{д}}(j\omega) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t)e^{jn\omega_{\text{д}}t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j(\omega - n\omega_{\text{д}})t} dt. \quad (5.16)$$

Произведение сигнала $s(t)$ на $e^{jn\omega_{\text{д}}t}$ эквивалентно сдвигу спектральной функции $S(\omega)$ на частоту $n\omega_{\text{д}}$, на основании чего спектр дискретизированного сигнала (5.16) можно представить:

$$S_{\text{д}}(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S[j(\omega - n\omega_{\text{д}})]. \quad (5.17)$$

Из выражения (5.17) следует, что спектр дискретизированного сигнала – это строго периодическая функция, состоящая из спектров аналогового сигнала $S(\omega)$, повторяющихся с периодом, равным частоте дискретизации сигнала ω_d (см. рис. 5.5).

Существует другой способ определения спектра дискретизированного сигнала непосредственно через его отсчеты $s(kT)$. Для этого представим выражение (5.9) в другой форме:

$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT)\delta(t - kT). \quad (5.18)$$

В данном выражении с учетом фильтрующих свойств дельта-функции непрерывный сигнал $s(t)$ можно заменить отсчетами $s(kT)$, так как дельта-функция отлична от нуля только во время $t=kT$.

Для определения спектра сигнала $s_d(t)$ выполним прямое преобразование Фурье выражения (5.18), при этом ограничимся только реальными положительными отсчетами $k=0, 1, 2, \dots, \infty$:

$$S_d(\omega) = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\delta(t - kT)e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT) \int_0^{\infty} \delta(t - kT)e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)e^{-j\omega kT}. \quad (5.19)$$

Из проведенного анализа следует, что для определения спектра дискретизированного сигнала можно воспользоваться двумя выражениями **(5.17)** и **(5.19)**. Однако размерность спектра в этих выражениях отличается от размерности аналоговых спектров. Спектр в данном представлении имеет размерность единиц сигнала, например, вольт (В), в отличие от аналогового спектра $S(j\omega)$ **(3.27)**, который измеряется в В/Гц.

Важно также отметить, что использование дельта-функции в качестве тактовой обеспечивает безыскаженное преобразование дискретизированного сигнала в спектр. Однако спектр $S(\omega)$ **(см. рис. 5.5)**, как и сам сигнал $s_d(t)$ **(см. рис. 5.6)**, в силу свойств дельта-функции будет иметь бесконечную энергию, что отличает его от реальных сигналов. Кроме того, реализовать практически такой процесс дискретизации в принципе невозможно, в силу конечной энергии используемых тактовых импульсов. Поэтому на практике чаще всего используются прямоугольные тактовые импульсы **(см. рис. 5.1, б)** с большой скважностью $\tau_0/T \ll 1$ и фиксированной амплитудой U_0 . В этом случае при подборе параметров импульсов можно обеспечить требуемую равномерность огибающей спектра в пределах нескольких периодов дискретизации, что позволит пренебречь амплитудными искажениями **(см. рис. 5.4)**.

Таким образом, при выполнении определенных требований к тактовой функции для спектрального анализа дискретизированного сигнала, с некоторым приближением, можно использовать выражения, полученные на базе дельта-функции.

5.2. Дискретное преобразование Фурье

Из проведенного ранее анализа согласно (5.17) спектру дискретизированного сигнала соответствует непрерывный спектр аналогового сигнала $S(\omega)$ (рис. 5.8, а), повторяющийся с периодом частоты дискретизации $\omega_d = 2\pi/T$, где T – период дискретизации сигнала $s(t)$ (рис. 5.8, б). Однако для цифровой обработки сигналов используется спектр в дискретной форме, для получения которого необходимо провести некоторые преобразования дискретизированного сигнала $s_d(t)$.

С учетом свойств преобразований Фурье, для формирования дискретного спектра необходимо использовать периодический сигнал. Поэтому, условно, дискретизированный сигнал $s_d(t)$ преобразуют в периодический, с периодом, равным длительности сигнала $T_c = NT$ (N – количество отсчетов в сигнале). В этом случае спектр полученного сигнала можно разложить в **дискретный ряд Фурье**: на гармоники $S(\Delta\omega n)$, кратные $\Delta\omega = 2\pi/T_c$ [см. (3.19)]. Тогда с учетом (5.19) дискретный спектр можно представить в виде прямого **дискретного преобразования Фурье (ДПФ)** (рис. 5.8, в):

$$S(n\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT)e^{-jn\Delta\omega kT}, \quad (5.20)$$

где n – номер гармоники спектра; $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm N/2$ (при четном N).

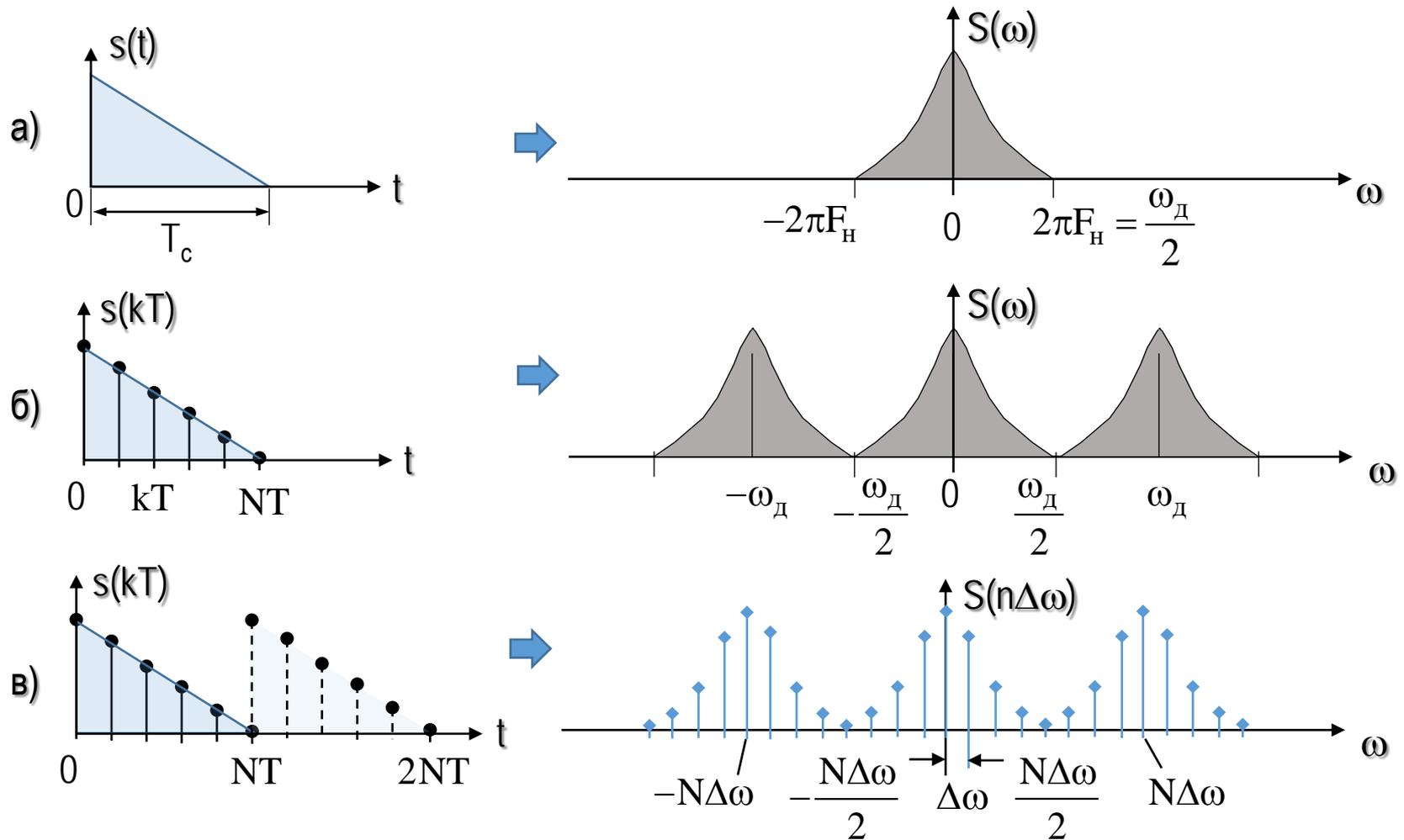


Рис. 5.8. Спектр Фурье: а – непрерывного сигнала $s(t)$; б – дискретизированного сигнала $s(kT)$; в – периодического дискретизированного сигнала $s(kT)$ (ДПФ)

Для простоты записи часто дискретное преобразование Фурье выражают через номер гармоники n и номер отсчета дискретизированного сигнала k :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}. \quad (5.21)$$

Функция (5.21) обладает свойством:

$$S\left(\frac{N}{2} + i\right) = S^*\left(\frac{N}{2} - i\right), \quad (5.22)$$

где $S^*(n)$ – значение гармоники комплексно-сопряженной с $S(n)$.

С учетом, что N является периодом спектра, данное свойство легко доказать:

$$S\left(\frac{N}{2} + i\right) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N}{2} + i\right)} = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{+j \frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N}{2} - i\right)} = S^*\left(\frac{N}{2} - i\right). \quad (5.23)$$

В результате значение любой гармоники больше $N/2$ можно вычислить через комплексно-сопряженное значение спектра зеркальных гармоник меньших $N/2$. Например, при $N=8$, для $n=5$ $S(5)=S^*(3)$; для $n=6$ $S(6)=S^*(2)$ и т.д. (см. рис. 5.8, в).

Из аналогичных рассуждений можно получить **обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ)**:

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad (5.24)$$

где $k=0, 1, 2, \dots, N-1$.

5.3. Свертка дискретных сигналов

Согласно теореме о свертке аналоговых сигналов, реакция линейной цепи с импульсной характеристикой $h(t)$ (**рис. 5.9**) [$h(t)$ – временная реакция цепи на импульс дельта функции – $\delta(t)$] определяется сверткой

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t) h(t - \tau) d\tau. \quad (5.25)$$

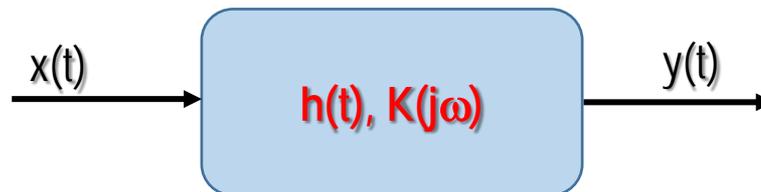


Рис. 5.9. К пояснению о свертке сигнала в линейной цепи

Взяв прямое преобразование Фурье свертки, реакцию этой же линейной цепи можно определить через спектр входного сигнала $S_x(j\omega)$ и частотную характеристику линейной цепи $K(j\omega)$:

$$S_y(j\omega) = K(j\omega)S_x(j\omega), \quad (5.26)$$

где
$$S_x(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt; \quad K(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (5.27)$$

Пользуясь эквивалентностью непрерывных и дискретных преобразований Фурье, можно получить свертку для дискретных сигналов.

В случае, если $S_x(n\Delta\omega)$ – это дискретное преобразование Фурье для сигнала с конечным числом отсчетов N_s :

$$s_d(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} s(kT)\delta(t - kT), \quad (5.28)$$

а $H(n\Delta\omega)$ – дискретное преобразование Фурье для импульсной характеристики линейного устройства с длительностью N_h :

$$h(t) = \sum_{k=0}^{N_h-1} h(kT)\delta(t - kT), \quad (5.29)$$

то произведению $S_y(n\Delta\omega) = H(n\Delta\omega)S_x(n\Delta\omega),$ (5.30)

соответствует свертка: $y(mT) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)s[(m-k)T],$ (5.31)

где $N \geq N_s + N_h.$

Исходя из **(5.30)**, выходной спектр можно получить произведением дискретного спектра входного сигнала $S_x(n\Delta\omega)$ на амплитудно-частотную характеристику линейной цепи $H(n\Delta\omega)$, например, цифрового фильтра, либо во временном масштабе, пользуясь формулой дискретной свертки **(5.31)**, через импульсную характеристику линейной цепи $h(kT)$.

Перечень контрольных вопросов:

1. [Преобразование Фурье дискретных сигналов.](#)
2. [Влияние формы дискретизирующих импульсов на точность преобразования Фурье дискретных сигналов.](#)
3. [Дискретное преобразование Фурье.](#)
4. [Свертка дискретных сигналов.](#)

6. Быстрое преобразование Фурье

Учебные цели.

Изучить: принципы быстрого преобразования Фурье (БПФ) с прореживанием по времени; принципы БПФ с прореживанием по частоте; алгоритм обратного БПФ.

6.1. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ)

Для аппаратной или программной реализации процедур дискретного преобразования Фурье требуется большое число вычислительных операций, на что затрачивается большое время вычислений и большой объем памяти. Для решения данной проблемы разработан способ быстрого преобразования Фурье (БПФ), на английском – Fast Fourier Transform [FFT].

Существует множество алгоритмов БПФ, поэтому для каждого вводится свое обозначение: алгоритм БПФ с основанием 2 (БПФ-2), алгоритм БПФ с основанием 4 (БПФ-4), алгоритм БПФ Виноградова т. п.

Чаще на практике применяется алгоритм с основанием 2 (БПФ Кули–Тьюки) – разработка 1965 года в США. Этот алгоритм работает с количеством отсчетов кратным 2:

$$N=2^v,$$

где v – целое число.

Если это условие не выполняется, то для кратности добавляются отсчеты с нулевым напряжением (это некоторый недостаток алгоритма).

Существует несколько вариантов организации вычислений БПФ: в зависимости от деления последовательности отсчетов на части и от того, на сколько фрагментов производится разбиение на каждом шаге.

На практике используется прореживание (разбиение) последовательности дискретизированного сигнала по времени и по частоте.

Количество отсчетов прореживания определяется основанием БПФ: минимальным числом отсчетов, на которые поэтапно (пошагово) разбивается вся последовательность отсчетов сигнала. Например, если используется БПФ-2, то вся последовательность прореживается пошагово на две последовательности отсчетов, для БПФ-4 – на четыре и т.д.



6.2. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени

Рассмотрим принцип БПФ с основанием 2 (БПФ-2) и прореживанием по времени, который основан на поэтапном разряжении последовательности отсчетов $s(k)$ во времени, $k = 1, N - 1$ на две подпоследовательности, через один отсчет (рис. 6.1).

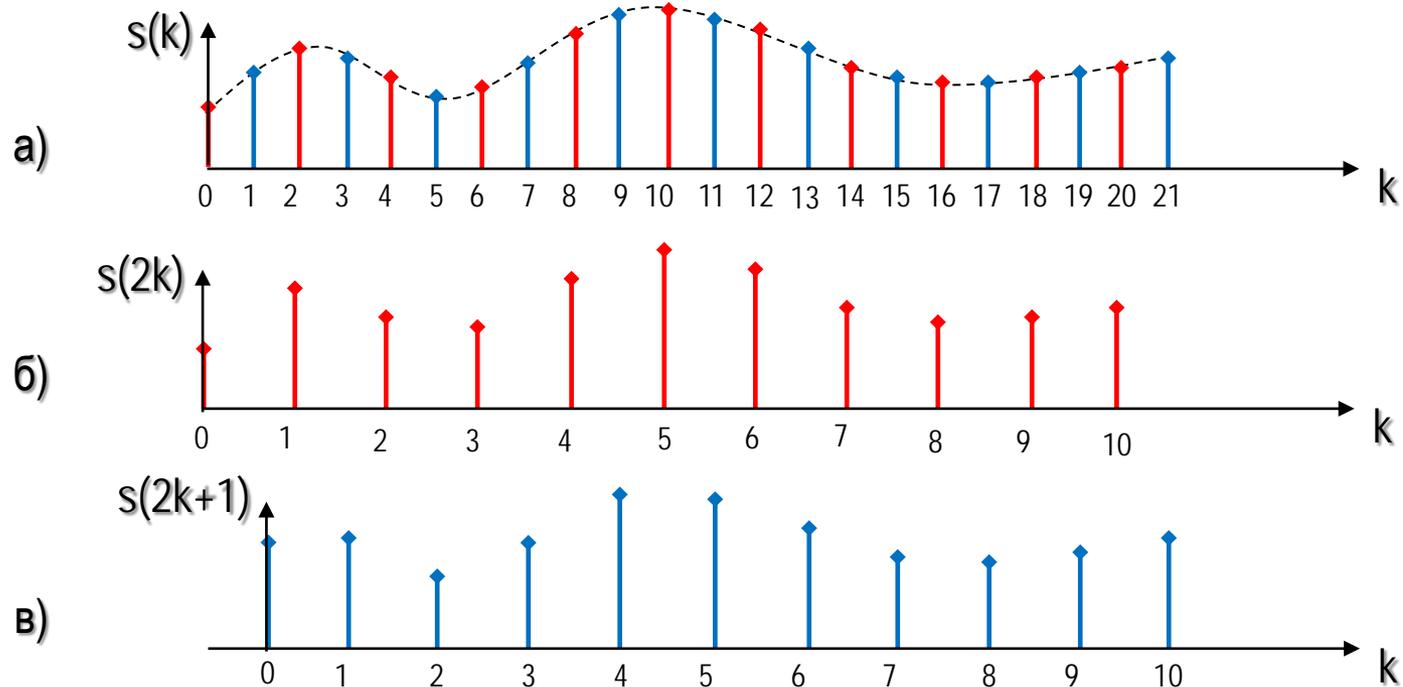


Рис. 6.1. Алгоритм прореживания по времени: а – исходная последовательность; б – четная подпоследовательность; в – нечетная подпоследовательность

В данном алгоритме необходимо чтобы число отсчетов в последовательности было кратно двум $N=2^r$, где r – целое число. В исходном варианте ДПФ:

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) W_N^{nk}, \quad (6.1)$$

где W_N – экспоненциальная комплексная функция; $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

С учетом (6.1), при разделении последовательности на две, дискретный спектр сигнала будет определяться:

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N/2-1} s(2k) W_N^{2nk} + \sum_{k=0}^{N/2-1} s(2k+1) W_N^{n(2k+1)}, \quad n=\overline{0, N-1}. \quad (6.2)$$

В выражении (6.2) комплексные функции можно представить через функцию с основанием $N/2$: $W_{N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}}$:

$$W_N^{2nk} = e^{-\frac{j2\pi}{N/2}nk} = W_{N/2}^{nk}; \quad W_N^{n(2k+1)} = e^{-\frac{j2\pi}{N/2}nk} e^{-\frac{j2\pi}{N}n} = W_{N/2}^{nk} W_N^n.$$

В результате, (6.2) примет вид:

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N/2-1} s(2k) W_{N/2}^{nk} + W_N^n \sum_{k=0}^{N/2-1} s(2k+1) W_{N/2}^{nk}, \quad n=\overline{0, N-1}. \quad (6.3)$$



Из сравнений (6.2) и (6.3) видно, что число складываемых отсчетов за один шаг разбиения последовательности уменьшился в два раза $N/2$. Для дальнейшего уменьшения числа вычислительных операций каждая подпоследовательность поэтапно делится на две, до получения одиночных отсчетов.

С целью упрощения выражений БПФ введем обозначения:

$S(n) = S_r(n)$ – ДПФ для всех $N=2^r$ входных отсчетов дискретного сигнала;

$S_{r-1.0}(n) = \sum_{k=0}^{N/2-1} s(2k)W_{N/2}^{nk}$ – ДПФ для всех $N=2^{r-1}$ входных отсчетов с четными номерами (первый индекс равен $r-1$, а второй – четному числу – № последовательности: 0, 2, 4...);

$S_{r-1.1}(n) = W_N^n \sum_{k=0}^{N/2-1} s(2k+1)W_{N/2}^{nk}$ – ДПФ для всех $N=2^{r-1}$ входных отсчетов с нечетными номерами (второй индекс равен нечетному числу – № последовательности: 1, 3, 5, 7,...).

С учетом принятых обозначений выражение можно записать:

$$S_r(n) = S_{r-1.0}(n) + W_N^n S_{r-1.1}(n), \quad n=0, N-1. \quad (6.4)$$



Спектры $S_{r-1,0}(n)$ и $S_{r-1,1}(n)$ являются периодическими функциями с периодом $N/2$ при числе гармоник N .

Величина $W_N^n = e^{-\frac{j2\pi}{N}n}$ называется множителем поворота, который обладает свойством изменения знака:

$$W_N^{n+N/2} = e^{-\frac{j2\pi}{N}(n+N/2)} = e^{-\frac{j2\pi}{N}n} e^{-j\pi} = -W_N^n. \quad (6.5)$$

Здесь значение $e^{-j\pi} = \cos(-\pi) + j\sin(-\pi) = -1 + j \times 0 = -1$.

Свойство поворотной функции позволяет записать базовую функцию БПФ для всех частот спектра (от 0 до $N-1$):

$$S_r(n) = \begin{cases} S_{r-1,0}(n) + W_N^n S_{r-1,1}(n), & n = \overline{0, N/2 - 1}; \\ S_{r-1,0}(n) - W_N^n S_{r-1,1}(n), & n = \overline{N/2, N-1}. \end{cases} \quad (6.6)$$

Данную базовую функцию (6.6) можно представить виде графа (рис. 6.2), называемого «бабочкой» (butterfly).

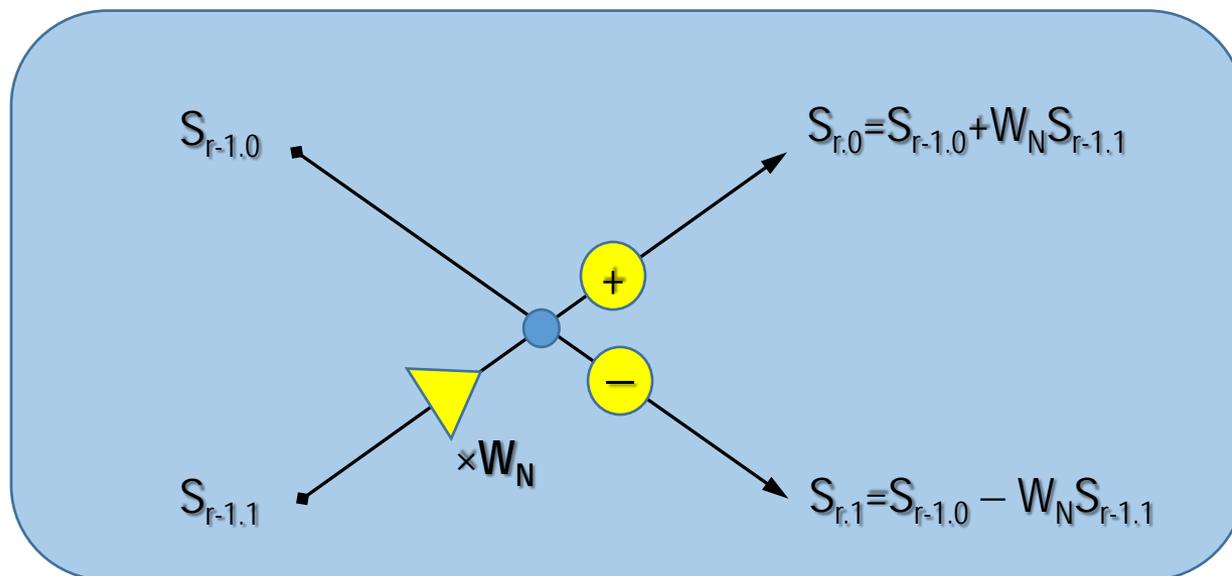


Рис. 6.2. Граф базовой функции БПФ

Рассмотрим пример вычисления БПФ-2 для последовательности $N=2^3=8$, $r=3$. Процедуру последовательного разбиения последовательности до одиночного отсчета с учетом базовой функции (6.6) БПФ-2 можно представить в виде 3-шагового прореживания на пары элементов:

$$\begin{array}{l}
\mathbf{1)} \left\{ \begin{array}{l} S_3(n) = \begin{cases} S_{2.0}(n) + W_8^n S_{2.1}(n), & n=\overline{0,3}; \\ S_{2.1}(n) - W_8^n S_{2.1}(n), & n=\overline{5,7}, \end{cases} \\ n = \overline{0,7}; \end{array} \right. \\
\\
\mathbf{2)} \left\{ \begin{array}{l} S_{2.0}(n) = \begin{cases} S_{1.0}(n) + W_4^n S_{1.1}(n), & n=\overline{0,1}; \\ S_{1.0}(n) - W_4^n S_{1.1}(n), & n=\overline{2,3}; \end{cases} \\ S_{2.1}(n) = \begin{cases} S_{1.2}(n) + W_4^n S_{1.3}(n), & n=\overline{0,1}; \\ S_{1.2}(n) - W_4^n S_{1.3}(n), & n=\overline{2,3}; \end{cases} \\ n = \overline{0,3}. \end{array} \right. \\
\\
\mathbf{3)} \left\{ \begin{array}{l} S_{1.0}(n) = \begin{cases} S_{0.0}(n) + W_2^n S_{0.1}(n) = s(0) + s(4), & n=0; \\ S_{0.0}(n) - W_2^n S_{0.1}(n) = s(0) - s(4), & n=1; \end{cases} \\ S_{1.1}(n) = \begin{cases} S_{0.2}(n) + W_2^n S_{0.3}(n) = s(2) + s(6), & n=0; \\ S_{0.2}(n) - W_2^n S_{0.3}(n) = s(2) - s(6), & n=1; \end{cases} \\ S_{1.2}(n) = \begin{cases} S_{0.4}(n) + W_2^n S_{0.5}(n) = s(1) + s(5), & n=0; \\ S_{0.4}(n) - W_2^n S_{0.5}(n) = s(1) - s(5), & n=1; \end{cases} \\ S_{1.3}(n) = \begin{cases} S_{0.6}(n) + W_2^n S_{0.7}(n) = s(3) + s(7), & n=0; \\ S_{0.6}(n) - W_2^n S_{0.7}(n) = s(3) - s(7), & n=1; \end{cases} \\ n = \overline{0,1}. \end{array} \right.
\end{array}
\tag{6.7}$$

С учетом **(6.7)** алгоритм операций БПФ можно представить в виде графа **(рис. 6.3)**: как предварительные перестановки отсчетов, затем последовательные базовые операции БПФ-2 **(6.6)**.

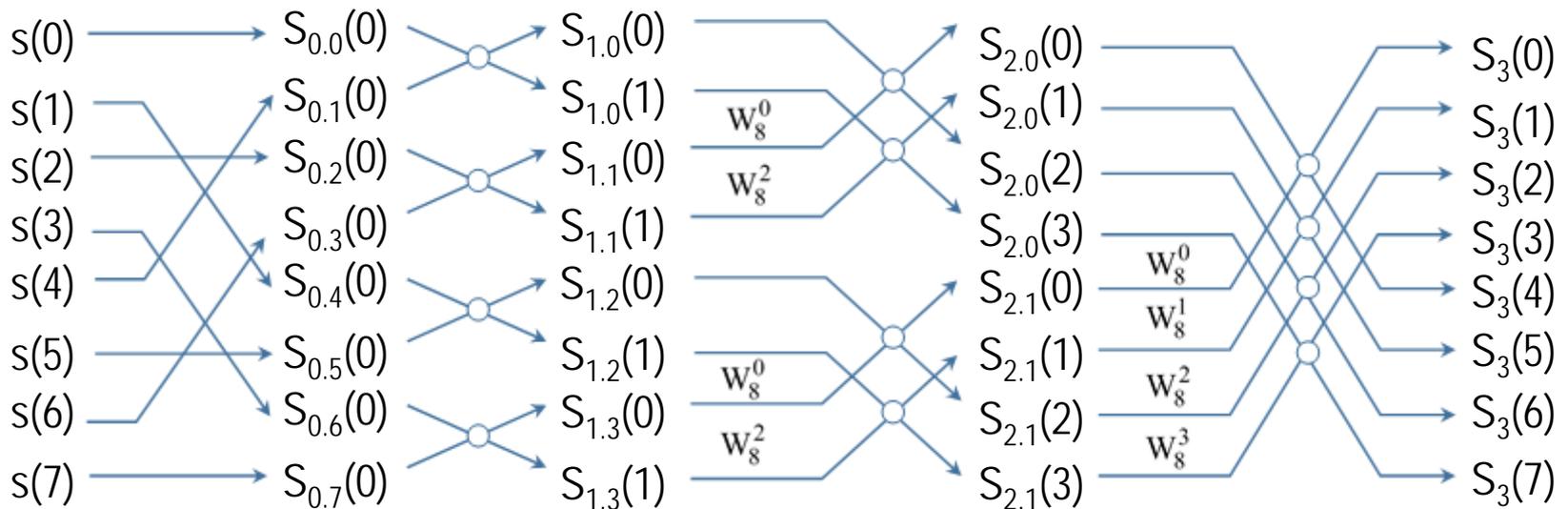


Рис. 6.3. Граф алгоритма БПФ-2 с прореживанием по времени при N=8

Процесс перестановки имеет определенную закономерность. Первый этап перестановок отсчетов идет путем инверсии номера в двоичном коде. Например, для последовательности $N=8$: отсчет $k=4_{/10}(100_{/2})$ зеркально инвертируется на $001_{/2}$, соответствующий $k=1_{/10}$, т.е. отсчет $s(4)$ переставляется на второе место $S_{0.1}(0)$ (см. рис. 6.3). В результате перестановка всех отсчетов будет производиться в порядке: $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 6, 4 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 3, 7 \rightarrow 7$.

Выигрыш по числу вычислений в БПФ по отношению к ДПФ определяется выражением $N/\log_2 N$. При большом числе отсчетов, например для $N=1024$ ($r=10$), выигрыш равен 102,4. Для больших N выигрыш растет.

На практике процесс БПФ может строиться на базе модулей БПФ-2, БПФ-4, БПФ-8 и т.д. На **рис. 6.4** показан пример построения БПФ-8 с прореживанием по времени на базе модулей БПФ-2 и БПФ-4.

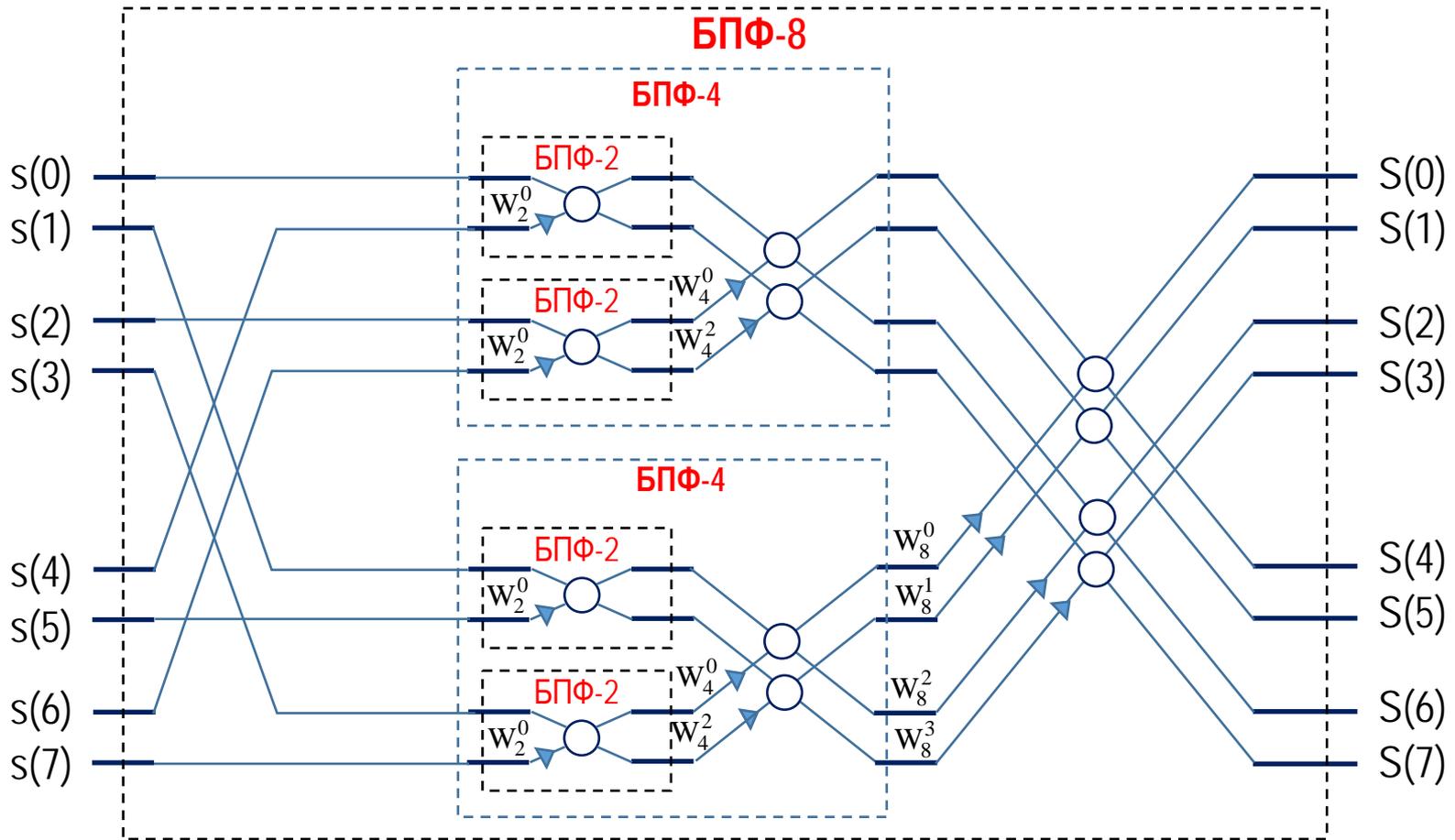


Рис. 6.4. Структура БПФ-8 с прореживанием по времени

По аналогии, путем наращивания, например, элементов БПФ-8 строятся БПФ для большего числа отсчетов: БПФ-16 (рис. 6.5), БПФ-32 и т.д.

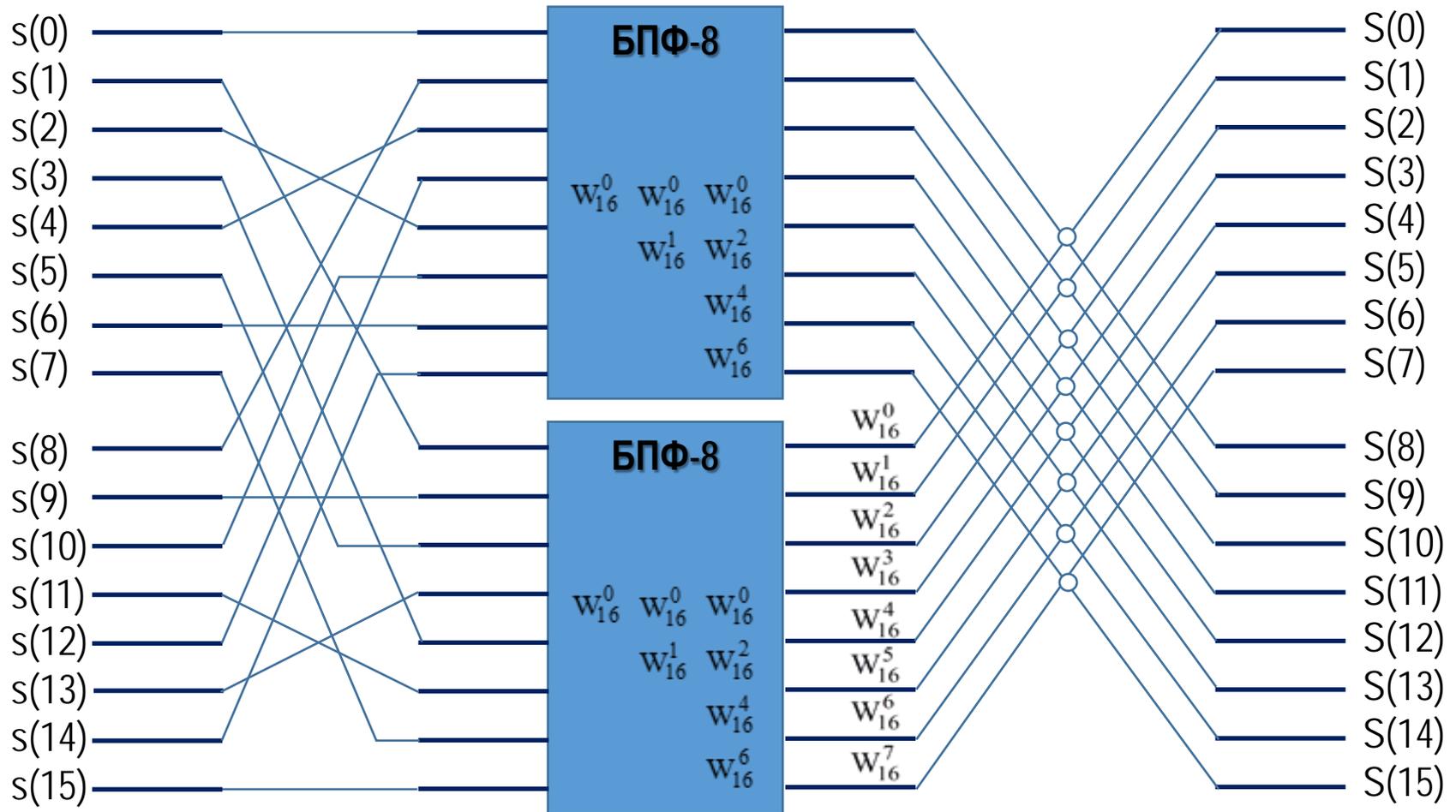


Рис. 6.5. Структура БПФ-16 с прореживанием по времени

6.3. Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте

Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте основан на обратном порядке БПФ с прореживанием по времени (исходя из обратимости прямого и обратного преобразований Фурье). Сущность алгоритма заключается в пошаговом разбиении исходной последовательности $s(k)$ на две следующие друг за другом половины и извлечении спектров (рис. 6.6).

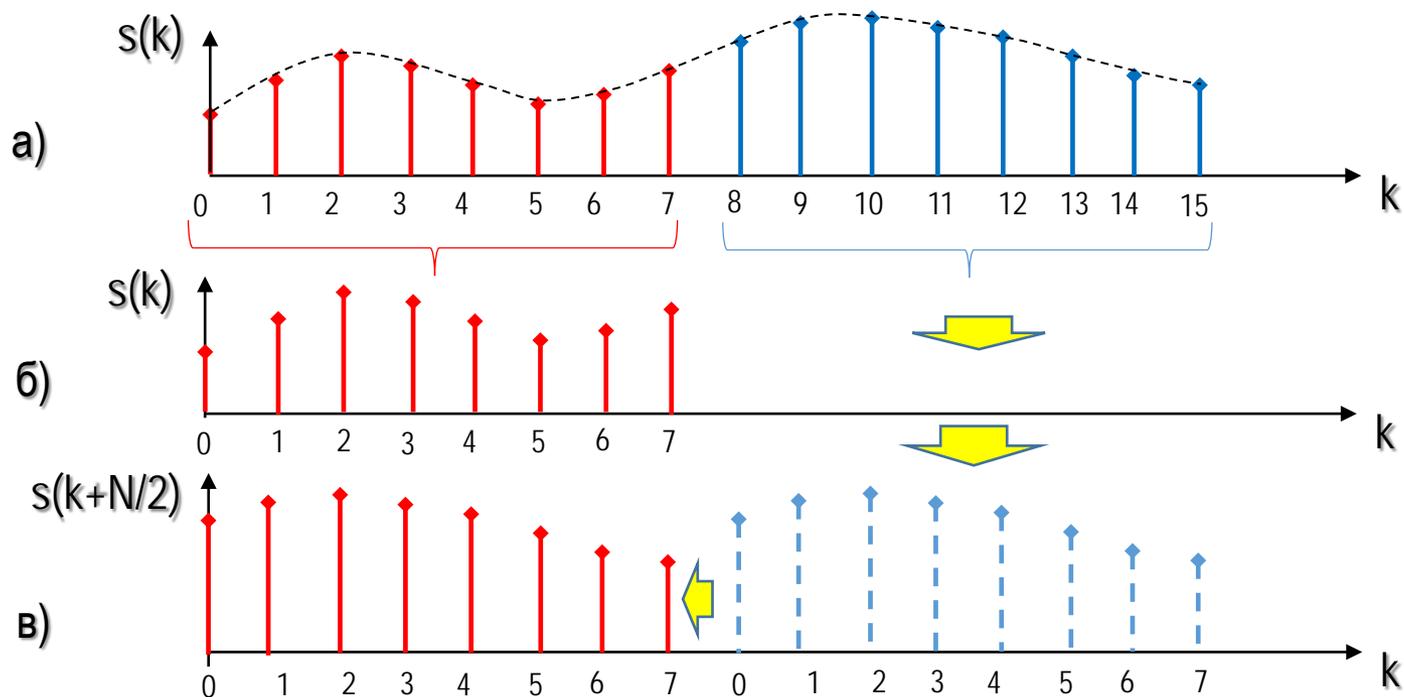


Рис. 6.6. Алгоритм прореживания по частоте: а – исходная последовательность; б – первая половина последовательности; в – вторая половина последовательности

При таком прореживании выражение (6.1) примет вид:

$$S(n) = \sum_{m=0}^{N/2-1} s(m)W_N^{nm} + \sum_{m=0}^{N/2-1} s(m + N/2)W_N^{n(m+N/2)}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (6.8)$$

Из второй суммы выделим множитель:

$$W_N^{n(N/2)} = e^{-j\frac{2\pi n}{N} \times \frac{N}{2}} = e^{-j\pi n} = \cos(\pi n) - j\sin(\pi n) = (-1)^n, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (6.9)$$

который может принимать значение **1** или **-1** в зависимости от четности номера спектрального отсчета n , на основании чего выражение (6.8) можно упростить и представить в виде **четных $S(2k)$** и **нечетных $S(2k+1)$** спектральных составляющих:

$$\begin{cases} S(2k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} [s(m) + s(m + N/2)]W_{N/2}^{mk}, & n = \overline{0, N-1}; \\ S(2k+1) = \sum_{m=0}^{N/2-1} [s(m) - s(m + N/2)]W_{N/2}^{mk}W_N^m, & n = \overline{0, N-1}. \end{cases} \quad (6.10)$$

Таким образом, при прореживании формируются четные $x(m)$ и нечетные $y(m)$ последовательности длиной, уменьшаемой в 2 раза:

$$\begin{cases} x(m) = [s(m) + s(m + N/2)], & \text{четные;} \\ y(m) = [s(m) - s(m + N/2)]W_N^m, & \text{нечетные.} \end{cases} \quad (6.11)$$

Тогда с учетом индексов, принятых в (6.4), выражение (6.10) можно записать:

$$\begin{cases} S(2k) = X_r(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m)W_{N/2}^{mk}, & k=\overline{0, N/2-1}; \\ S(2k+1) = Y_r(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} y(m)W_{N/2}^{mk}, & k=\overline{0, N/2-1}. \end{cases} \quad (6.12)$$

Аналогично варианту прореживания по времени, для прореживания по частоте алгоритм можно представить в виде «бабочки» (butterfly) (рис. 6.7).

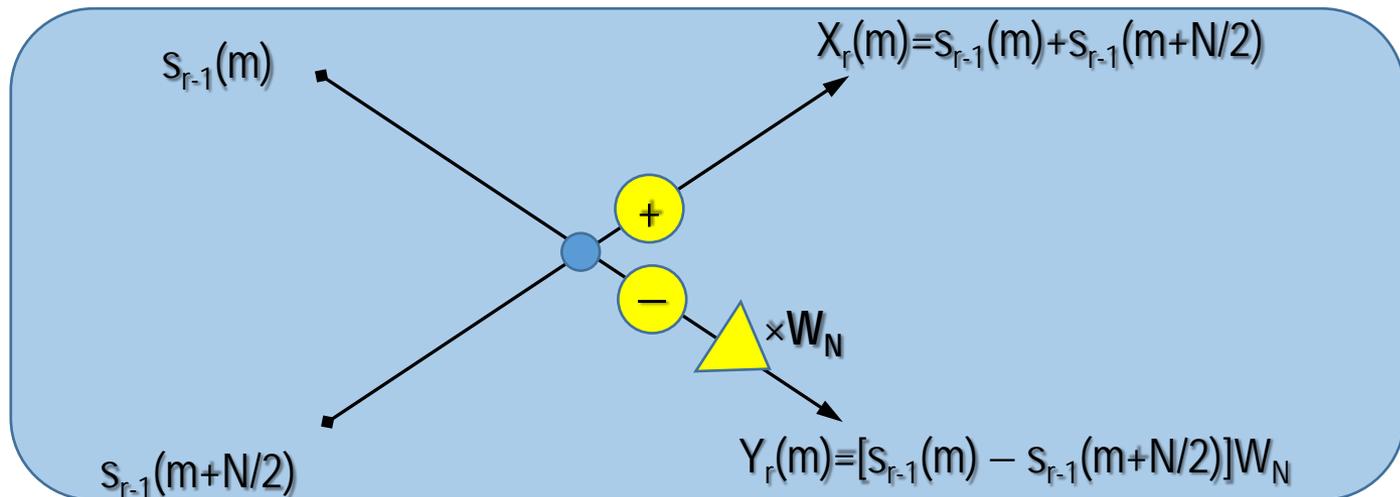


Рис. 6.7. Граф базовой функции БПФ с частотным прореживанием

Тогда на основании (6.11) и (6.12) алгоритм БПФ-2 с прореживанием по частоте при $N=8$, $r=3$ можно представить в виде графа (рис. 6.8).

Аналогично прореживанию по времени индекс r соответствует степени числа отсчетов $N=2^r$ в последовательности, из которой получены спектры четных X_r и нечетных подспектров Y_r .

На первом этапе данного алгоритма **БПФ-2** производится операция **ДПФ-2** по принципу «бабочка», на входах которых попарно используются отсчеты равных номеров из первой $s(m)$ и второй частей $s(m+N/2)$ последовательностей (см. рис. 6.4). Результаты первого этапа ДПФ-2 разносятся на **четную** x_r и **нечетную** y_r группы. После этого каждая группа полученных подспектров $X_{r-i}(n)$ и $Y_{r-i}(n)$ поэтапно подвергается ДПФ-2 по алгоритму «бабочка», в которых кратно 2 уменьшается экспоненциальная функция $W_{2^{r-i}}$.

Количество этапов ДПФ (r) определяется максимальным числом отсчетов N : $r=\log N$. Например, при $N=8$, $r=3$, следовательно, для БПФ потребуется **3 этапа** ДПФ-2 по алгоритму «бабочка» (см. рис. 6.7).

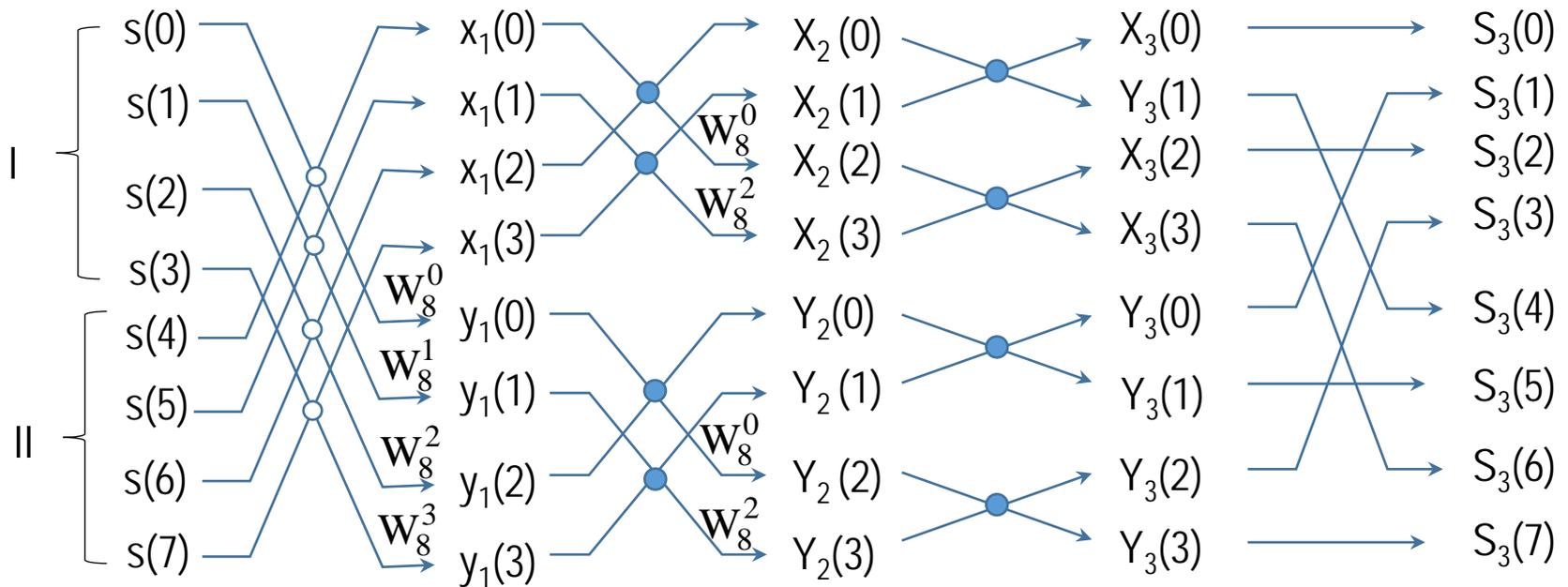


Рис. 6.8. Граф алгоритма БПФ-2 с прореживанием по частоте при N=8

Для справки: $W_8^0 = e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 0} = 1$; $W_8^1 = e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 1} = e^{-j\frac{\pi}{4}}$; $W_8^2 = e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 2} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$; $W_8^3 = e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 3} = e^{-j\frac{3\pi}{4}}$.

Выигрыш по числу вычислений в БПФ по отношению к ДПФ определяется аналогично варианту с прореживанием по времени: $N/\log_2 N$. Выигрыш возрастает с увеличением числа отсчетов N . Так, например, при $N=8$ выигрыш равен **2,7** раза, а при $N=1024$ – **102,4** раза.

6.4. Обратное быстрое преобразование Фурье

Обратное ДПФ определяется:

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad (6.13)$$

исходя из чего с учетом [\(6.1\)](#) можно аналогично получить алгоритм **обратного быстрого преобразования Фурье (ОБПФ)**:

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) W_N^{-nk}, \quad (6.14)$$

для этого выполним операцию **комплексного сопряжения** левой и правой части выражения [\(6.14\)](#) и умножим обе части на N :

$$Ns^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} S^*(n) W_N^{nk}. \quad (6.15)$$

Пояснение процесса сопряжения

Если $S(n) = |S(n)|e^{j\varphi(n)}$, то сопряженное значение $S^*(n) = |S(n)|e^{-j\varphi}$.
В результате правая часть выражения [\(6.15\)](#) соответствует [\(6.1\)](#).

Для окончательного получения ОБПФ, разделим обе части выражения (6.15) на N и, выполнив сопряжение левой и правой части ряда отсчетов, получим окончательную последовательность **ОБПФ** $s(k)$:

$$s(k) = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} S^*(n) W_N^{nk} \right)^*, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (6.16)$$

Таким образом, для **ОБПФ** необходимо выполнить БПФ комплексно-сопряженного спектра $S^*(n)$ по одному из двух вариантов (с прореживанием по времени или частоте). После этого выполнить обратное сопряжения результата и разделить все отсчеты на N [см. (6.16)].

Перечень контрольных вопросов:

1. [Алгоритм БПФ с прореживанием по времени.](#)
2. [Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте.](#)
3. [Алгоритм обратного БПФ.](#)

7. Применение функций Уолша для обработки сигналов

Учебные цели.

Изучить: способы спектрального анализа дискретных сигналов с помощью функций Уолша; методы спектрального анализа дискретных сигналов и оптимального упорядочивания спектров Уолша.

7.1. Функции Уолша и их свойства

Функции Радемахера и Уолша известны еще с 1922 года, но лишь недавно с широким внедрением цифровой обработки сигналов они стали востребованы.

Функции Радемахера (**рис. 7.1**) строятся на основе синусоидальных функций по следующему выражению:

$$r_k(\theta) = \text{sign}[\sin(2^k \pi \theta)], \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (7.1)$$

где $\theta = \frac{t}{T_0}$; θ – безразмерное время нормированное к произвольному

временному интервалу T_0 ; k – порядок функции; $\text{sign}[x]$ – сигнум-функция (переключательная функция) (**рис. 7.1**);

$$\text{sign}[x] = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

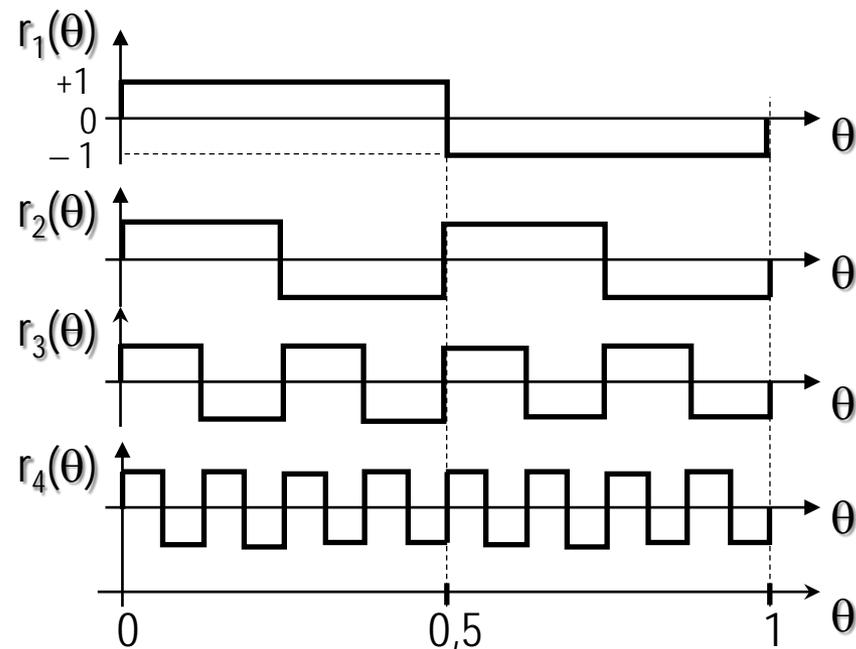


Рис. 7.1. Первые четыре функции Радемахера

Функция Радемахера является четной относительно $\theta=1/2$, нормированной и обладает свойством ортогональности:

$$\int_0^1 r_m(\theta)r_n(\theta)d\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases} \quad (7.3)$$

То есть функция Радемахера не составляет полную ортонормированную систему, в связи с чем для спектрального анализа используются функции Уолша:

$$\text{wal}(\omega, \theta) = \prod_{k=1}^n r_k(\theta)^{\omega_{n-k+1} \oplus \omega_{n-k}} \quad (7.4)$$

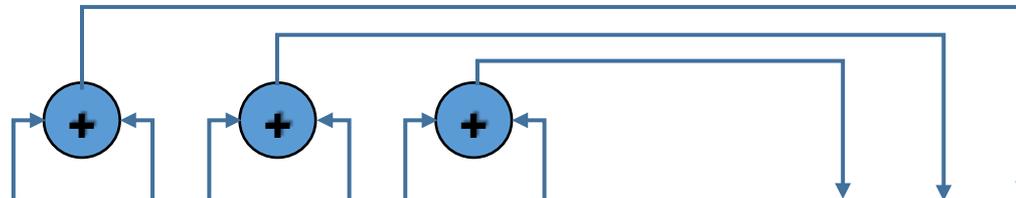
где ω – номер функции Уолша; ω_i – i -й разряд номера функции Уолша ω в двоичном коде; \oplus – оператор сложения по модулю два; N – число функций Уолша ($N=2^n$), определяющее количество функций Радемахера, на которые разлагается функция Уолша $n=\log N$.

Так, например, при $N=2^3=8$ вычислим 6-ю функцию Уолша $\text{wal}(6, \theta)$:

$$\text{wal}(6, \theta) = r_1(\theta)r_2^0(\theta)r_3(\theta) = r_1(\theta)r_3(\theta). \quad (7.5)$$

Расчет других функций Уолша при $N=8$ поясняется в **табл. 7.1**.

Пояснение принципа формирования функций Уолша при N=8



ω	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	$r_1(\theta) \times r_2(\theta) \times r_3(\theta) = wal(\omega, \theta)$
0	0	0	0	0	$r_1^0(\theta)r_2^0(\theta)r_3^0(\theta) = wal(0, \theta)$
1	0	0	0	1	$r_1^1(\theta)r_2^0(\theta)r_3^0(\theta) = wal(1, \theta)$
2	0	0	1	0	$r_1^1(\theta)r_2^1(\theta)r_3^0(\theta) = wal(2, \theta)$
3	0	0	1	1	$r_1^0(\theta)r_2^1(\theta)r_3^0(\theta) = wal(3, \theta)$
4	0	1	0	0	$r_1^0(\theta)r_2^1(\theta)r_3^1(\theta) = wal(4, \theta)$
5	0	1	0	1	$r_1^1(\theta)r_2^1(\theta)r_3^1(\theta) = wal(5, \theta)$
6	0	1	1	0	$r_1^1(\theta)r_2^0(\theta)r_3^1(\theta) = wal(6, \theta)$
7	0	1	1	1	$r_1^0(\theta)r_2^0(\theta)r_3^1(\theta) = wal(7, \theta)$

По аналогии с тригонометрическими функциями для четных и нечетных функций **Уолша** введены обозначения: $\text{sal}(j, \theta) = \text{wal}(2j, \theta)$ – четные, $\text{sal}(j, \theta) = \text{wal}(2j - 1, \theta)$ – нечетные.

Свойства функций Уолша

Свойство 1. Функции Уолша ортогональны на интервале $0 \leq \theta < 1$:

$$\int_0^1 \text{wal}(k, \theta) \text{wal}(i, \theta) d\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } k = i, \\ 0 & \text{при } k \neq i. \end{cases} \quad (7.6)$$

Свойство 2. Мультипликативное свойство функций Уолша:

$$\text{wal}(k, \theta) \text{wal}(i, \theta) = \text{wal}(k \oplus i, \theta), \quad (7.7)$$

т.е. перемножение функций Уолша дает новую функцию Уолша с номером $k \oplus i$, где \oplus – символ сложения по модулю 2.

Свойство 3. Свойство симметрии функций Уолша:

$$\text{wal}(i, \theta_1) \text{wal}(i, \theta_2) = \text{wal}(i, \theta_1 \oplus \theta_2). \quad (7.8)$$

Следствия для функций Уолша

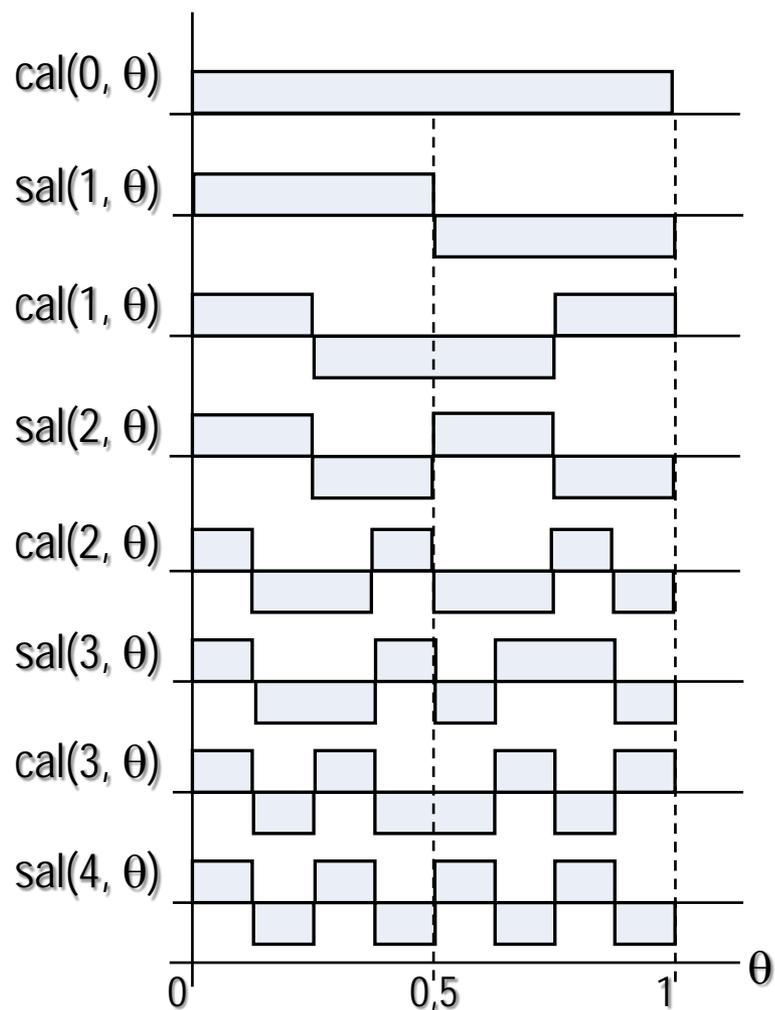
Умножение любой функции Уолша самой на себя дает функцию нулевого порядка $wal(0, \theta)$:

$$wal(i, \theta)wal(i, \theta) = wal(0, \theta) \text{ при } i \in \mathbb{Z}. \quad (7.9)$$

Умножение любой функции Уолша на нулевую функцию Уолша $wal(0, \theta)$ не изменяет функцию:

$$wal(i, \theta)wal(0, \theta) = wal(i, \theta). \quad (7.10)$$

Различают разные способы нумерации (упорядочивания) функций Уолша. Кроме рассмотренного варианта используют упорядочивание по Адамару $had(d, \theta)$ и по Пэли $pal(p, \theta)$. Пример нумерации функций Уолша приведен на **рис. 7.2.**



$wal(\omega, \theta)$	$pal(p, \theta)$	$had(d, \theta)$
ω	p	d
0	0	0
1	1	4
2	3	6
3	2	2
4	6	3
5	7	7
6	5	5
7	4	1

Рис. 7.2. Нумерация функций Уолша при различных способах упорядочивания. Размер базиса разложения $N=8$

7.2. Спектральное разложение сигнала на функции Уолша

Любую интегрируемую функцию $f(\theta)$ на интервале $0 \leq \theta < 1$ можно разложить в ряд Уолша:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) \text{wal}[n, \theta], \quad (7.11)$$

где коэффициенты $A(n)$ определяются выражением

$$A(n) = \int_0^1 f(\theta) \text{wal}[n, \theta] d\theta, \quad \theta = \frac{t}{T_0}. \quad (7.12)$$

Для примера рассмотрим разложение в спектр Уолша функции

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \quad (7.13)$$

В данном случае целесообразно принять $T=T_0$. Переход к безразмерному времени преобразует выражение **(7.13)**:

$$s(t) = \sin(2\pi\theta). \quad (7.14)$$

Для спектрального анализа ограничимся 16 функциями Уолша. При разложении функции (7.14) в ряд Уолша, в силу четности функции $\sin(x)$, останутся только нечетные коэффициенты $A(1)$, $A(5)$, $A(9)$ и $A(13)$, остальные будут равны нулю:

$$A(1) = 2 \int_0^{1/2} \sin(2\pi\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} = 0,636;$$

$$A(5) = 4 \int_0^{1/16} \sin(2\pi\theta) d\theta - 2 \int_{1/16}^{3/16} \sin(2\pi\theta) d\theta = -0,265;$$

$$A(9) = 4 \int_0^{1/16} \sin(2\pi\theta) d\theta - 4 \int_{1/16}^{3/16} \sin(2\pi\theta) d\theta + 2 \int_{3/16}^{5/16} \sin(2\pi\theta) d\theta = -0,052;$$

$$A(13) = 4 \int_0^{1/16} \sin(2\pi\theta) d\theta - 2 \int_{1/16}^{2/16} \sin(2\pi\theta) d\theta + 2 \int_{2/16}^{3/16} \sin(2\pi\theta) d\theta -$$

$$-2 \int_{3/16}^{5/16} \sin(2\pi\theta) d\theta = -0,128.$$

На **рис. 7.3** показаны спектры функции (7.14) при различных способах упорядочивания.

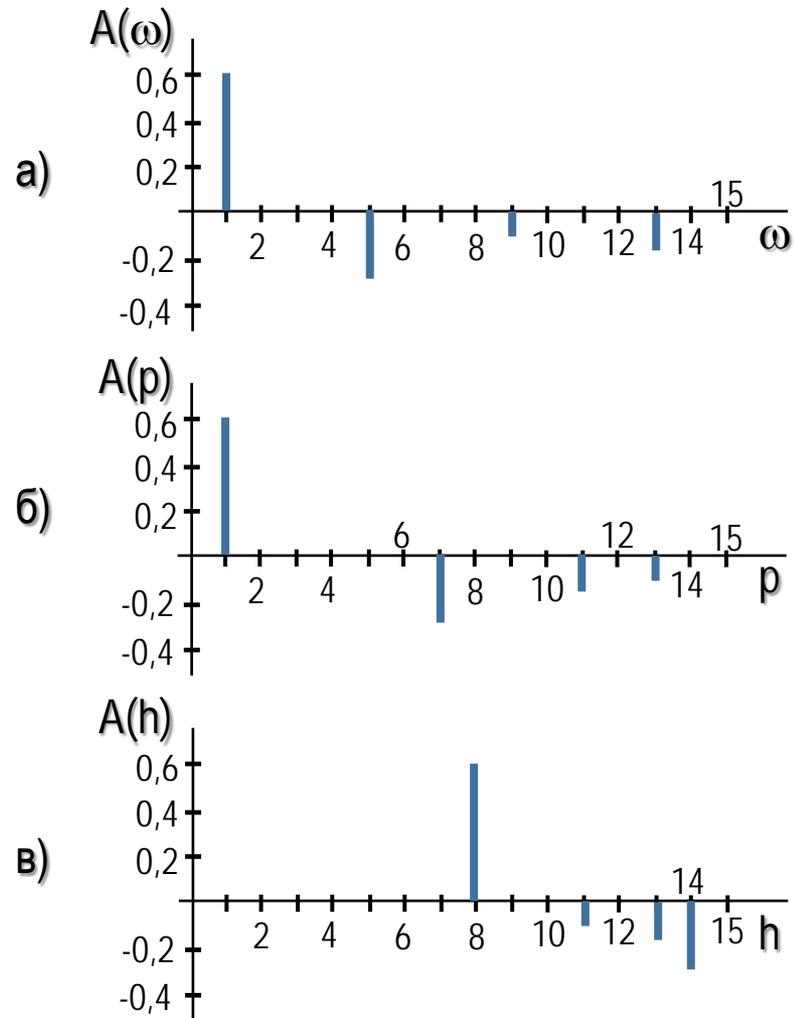


Рис. 7.3. Разложение синусоиды в ряды Уолша (размер базиса $N=16$):
 а – упорядочивание по Уолшу; б – по Пали; в – по Адамару

Для уменьшения искажений при восстановлении сигнала с ограниченным числом функций Уолша целесообразнее использовать вариант упорядочивания, обеспечивающий монотонное убывание спектра. Для приведенного примера лучшим вариантом является разложение по Пали, а худшим – по Адамару (см. рис. 7.3). На рис. 7.4 приведен восстановленный сигнал, разложенный в ряд Уолша, при ограничении базиса $N=16$.

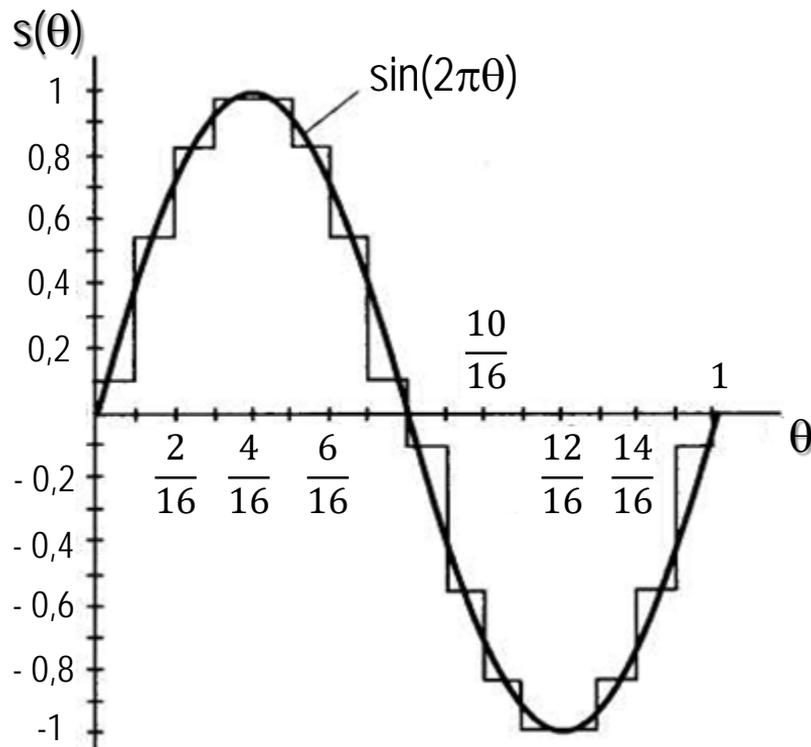


Рис. 7.4. Восстановленный сигнал после разложения по функциям Уолша при размере базиса $N=16$

7.3. Преобразование сигналов с помощью дискретных функций Уолша

Для цифровых методов спектрального анализа и обработки сигналов используют дискретные функции Уолша. Переход от непрерывных функций к дискретным основан на формировании этих функций в виде отсчетов, следующих в середине длительности минимального элемента функции Уолша, длительность которого равна $1/N$. Выражение для дискретной функции имеет вид:

$$\text{wal}(\omega, x) = (-1)^{\sum_{k=1}^n (\omega_{n-k+1} \oplus \omega_{n-k}) \times x_k}, \quad (7.15)$$

где x – номер отсчета; $x=0, 1, 2, \dots, N-1$; x_k равен 0 или 1 в зависимости от номера отсчета.

Например, при $N=2^3=8$, $n=3$, для $x=1$ значения x_k равны $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$, следовательно, для

$$\text{wal}(0, 1) = (-1)^{\sum_{k=1}^n 0 \times x_k} = +1. \quad (7.16)$$

На **рис. 7.5** показан пример дискретных функций Уолша при $N=16$.

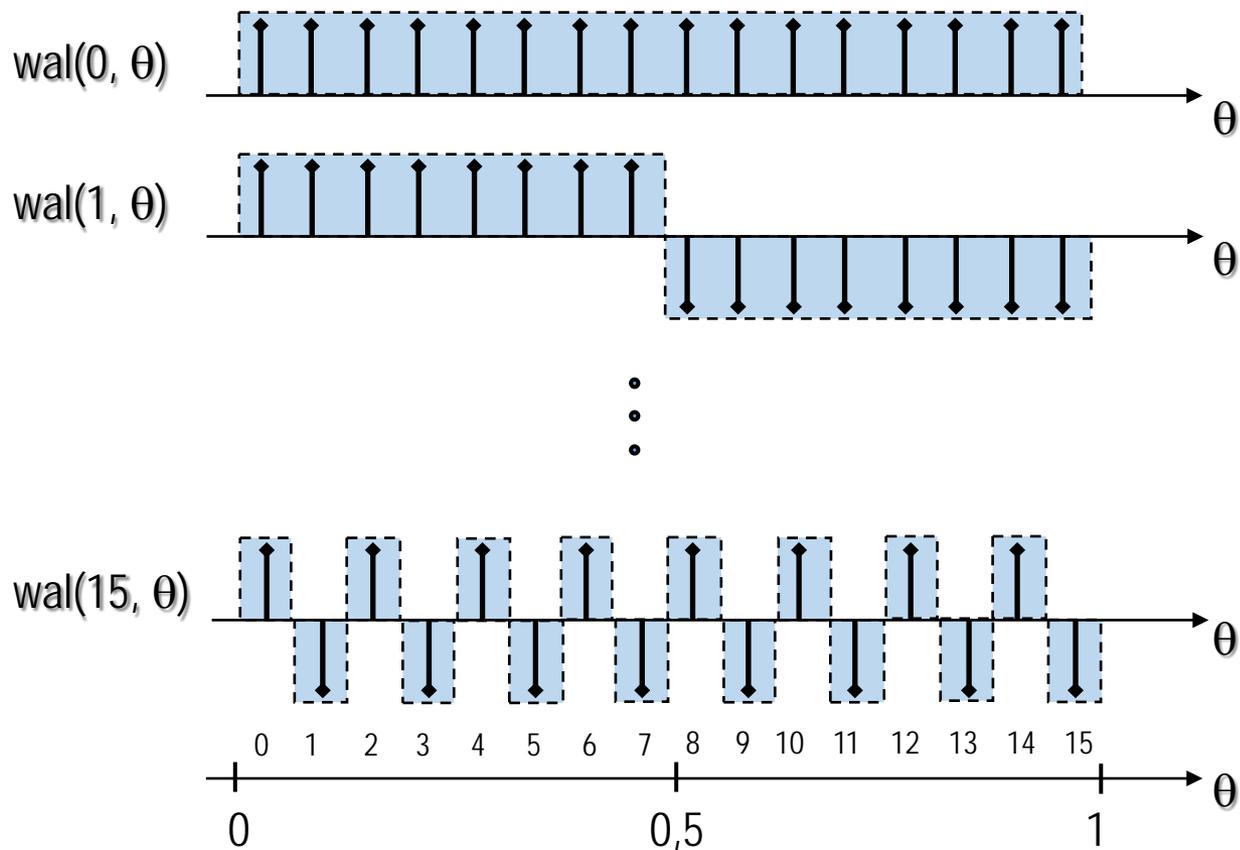


Рис. 7.5. Пример дискретных функций Уолша при $N=16$

По аналогии с ДПФ ([см. подр. 5.2](#)), для дискретного прямого и обратного преобразований Уолша используются выражения:

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \text{wal}(n, k); \quad (7.17)$$

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) \text{wal}(n, k), \quad (7.18)$$

где $k=0, 1, 2, \dots, N-1$.

Перечень контрольных вопросов:

1. [Функции Радемахера и их свойства.](#)
2. [Функции Уолша и их свойства.](#)
3. [Спектральное разложение сигналов на функции Уолша.](#)
4. [Варианты упорядочивания спектров по функциям: Уолша, Пали и Адамара.](#)
5. [Преобразование сигналов с помощью дискретных функций Уолша. Прямое и обратное дискретное преобразование Уолша.](#)

8. Линейные дискретные системы

Учебные цели.

Изучить: математические модели и свойства дискретных сигналов и линейных дискретных систем; методы анализа разностных уравнений линейных дискретных систем.

8.1. Типовые дискретные сигналы и их свойства

В цифровых системах используются следующие типовые испытательные сигналы:

1. Цифровой единичный импульс $u_0(n)$ (рис. 8.1, а):

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Единичный импульс равен единице только при $n=0$, в других случаях – нулю.

2. Задержанный цифровой единичный импульс $u_0(n - m)$ (рис. 8.1, б):

$$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (8.2)$$

Данный сигнал равен единице только при $n=m$, а в других случаях – нулю.

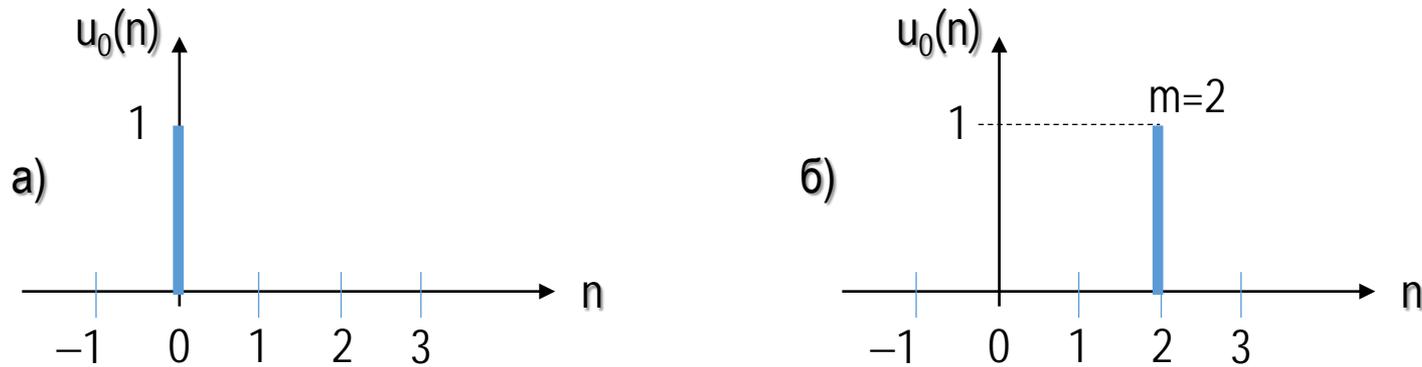


Рис. 8.1. Цифровой единичный импульс: а – без задержки;
б – задержанный m отсчетов

Цифровой единичный импульс, по аналогии с дельта-функцией для аналоговых сигналов, обладает фильтрующим свойством:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)u_0(n - m). \quad (8.3)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)u_0(n-m) = x(0)u_0(n) + x(1)u_0(n-1) + \dots + x(n)u_0(0) + \\ + x(n+1)u_0(-1) + \dots = x(0) \cdot 0 + x(1) \cdot 0 + \dots + x(n) \cdot 1 + x(n+1) \cdot 0 + \dots$$

То есть $y(n)=x(n)$ при $m=n$, в других случаях свертка **(8.3)** равна нулю.

3. Цифровой единичный скачок $u_1(n)$ (рис. 8.2, а):

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Этот сигнал равен нулю для всех отсчетов $n < 0$, а при всех больших значениях $n \geq 0$ – единице.

4. Задержанный цифровой единичный скачок $u_1(n-m)$ (рис. 8.2, б):

$$u_1(n-m) = \begin{cases} 1, & n \geq m; \\ 0, & n < m. \end{cases} \quad (8.5)$$

Задержанный единичный скачок равен нулю для всех отсчетов $n < m$, а при всех больших значениях $n \geq m$ – единице.

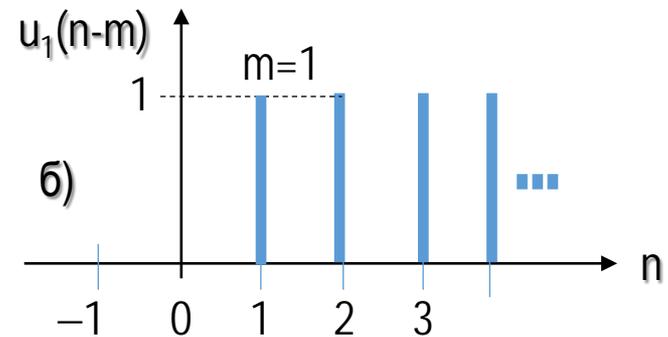
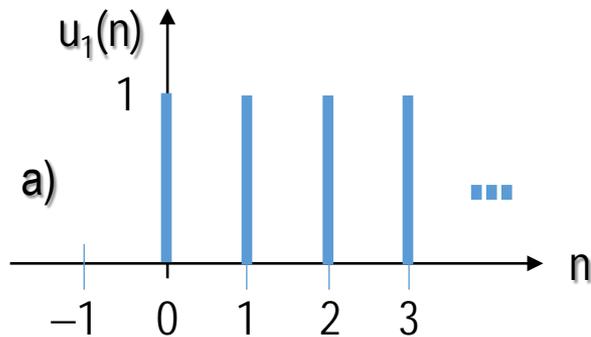


Рис. 8.2. Цифровой единичный скачок: а – без задержки;
б – с задержкой на m отсчетов

5. Дискретная экспонента

Дискретная экспонента описывается последовательностью

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (8.6)$$

где a – вещественная константа. В зависимости от величины и знака числа a дискретная экспонента изменяет свои свойства, в результате чего функция (8.6) будет при:

- $|a| < 1$ и $a > 0$ – убывающей и знакопостоянной (рис. 8.3, а);
- $|a| < 1$ и $a < 0$ – убывающей и знакопеременной (рис. 8.3, б);
- $|a| > 1$ и $a > 0$ – возрастающей (рис. 8.3, в); $a < 0$ – такой же, но знакопеременной;
- $|a| = 1$ и $a > 0$ – цифровым единичным скачком (рис. 8.1, а);
- $|a| = 1$ и $a < 0$ – знакопеременной последовательностью единиц (рис. 8.3, г).

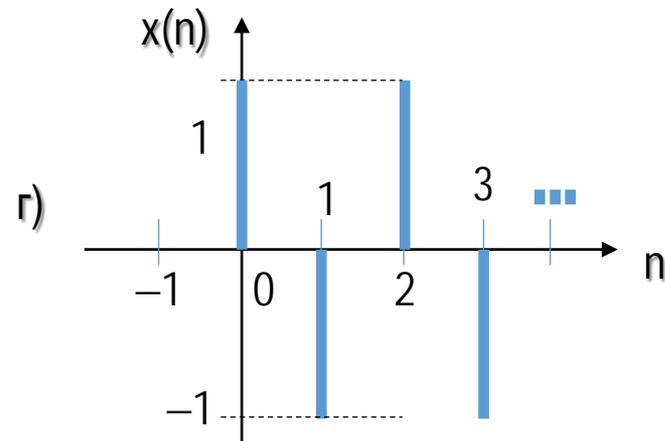
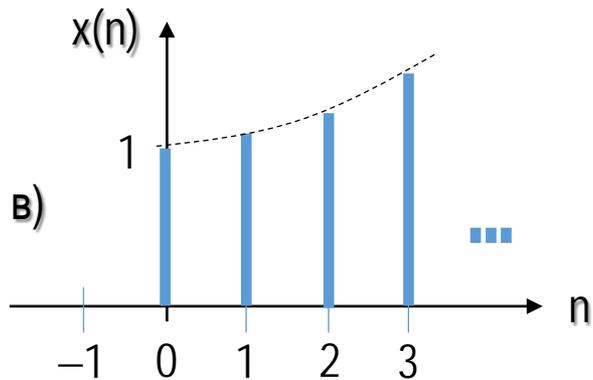
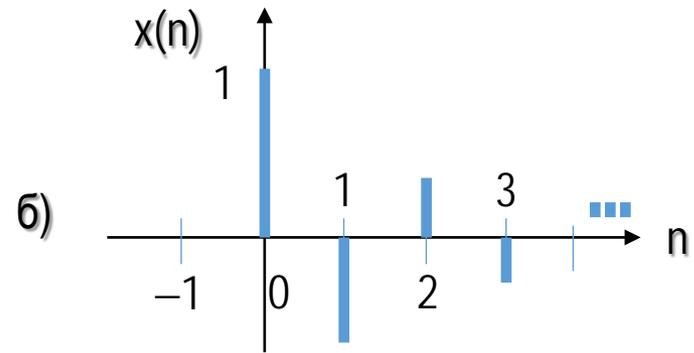
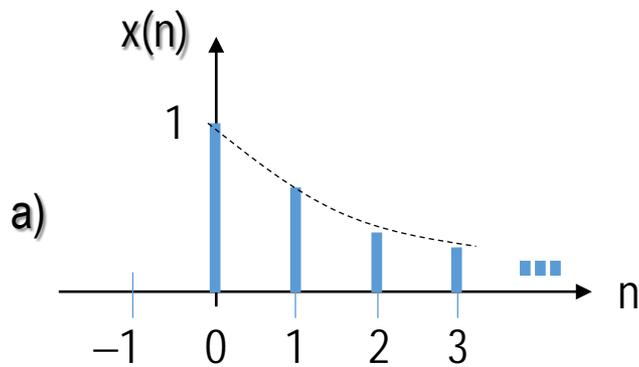


Рис. 8.3. Модификации дискретной экспоненты: а – знакпостоянная; б – знакопеременная; в – возрастающая; г – знакопеременная последовательность единиц

6. Дискретный гармонический сигнал

Дискретный гармонический сигнал описывается тригонометрическими функциями, например, дискретной косинусоидой (**рис. 8.4**):

$$x(n) = A \cos(2\pi f n T) = A \cos(\omega n T), \quad (8.7)$$

где f – частота колебаний, в Гц; ω – круговая частота; T – период дискретизации сигнала.

Для нормированной полосы частот $x(n) = A \cos(\hat{\omega} n)$. (8.8)

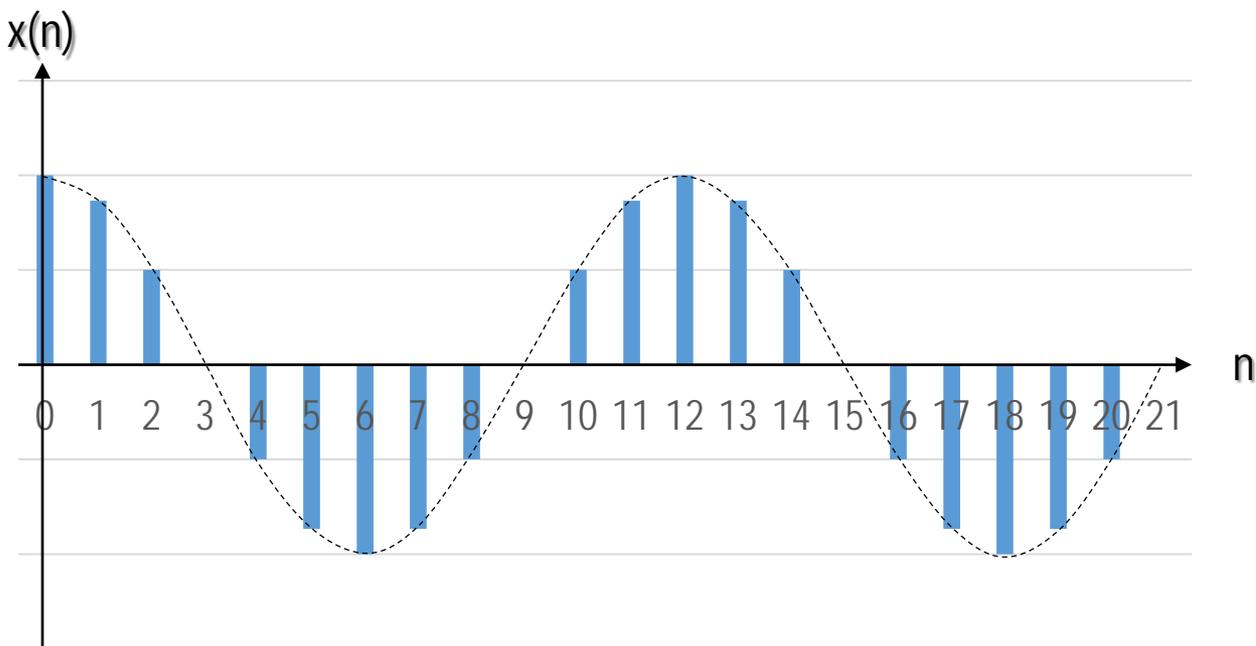


Рис. 8.4. Дискретная косинусоида

8.2. Основная полоса частот ЛДС. Нормированные частоты

В дискретных системах, согласно теореме Котельникова, верхняя частота сигналов ограничена частотой Найквиста $f_N = f_d/2$. Следовательно, дискретные системы целесообразно рассматривать только в области $[0, f_N]$, которую называют основной полосой частот.

С учетом этих ограничений для анализа дискретных систем используют нормированные частоты:

$$\hat{f} = \frac{f}{f_d} = fT; \quad \hat{\omega} = \frac{\omega}{f_d} = \omega T, \quad (8.9)$$

где T – период дискретизации сигнала; $T=1/f_d$. Из **(8.8)** следует, что область определения нормированных частот определена:

$$\hat{f} \in [0, 0,5]; \quad \omega \in [0, \pi/T]; \quad \hat{\omega} \in [0, \pi]. \quad (8.10)$$

Так, например, при использовании нормированных частот дискретная косинусоида **(8.7)** примет вид

$$x(n) = A \cos(2\pi\hat{f}n) = A \cos(\hat{\omega}n). \quad (8.11)$$

8.3. Свойства линейной дискретной системы

Системой обработки сигналов называется объект, выполняющий заданное преобразование входного сигнала в выходной.

Входной сигнал называется воздействием, а выходной – реакцией системы.

Соотношение, связывающее в общем случае реакцию нескольких выходов системы на воздействие с нескольких входов, называется соотношением вход/выход, которое описывается уравнением

$$Y = F(X), \quad (8.12)$$

где X – вектор воздействия; Y – вектор реакции системы, которые являются функциями времени; F – оператор (математическое преобразование), связывающий вектора X и Y .

В частном случае система содержит один вход и один выход. В этом случае уравнение (8.12) примет вид:

$$y = F(x), \quad (8.13)$$

где x – функция воздействия; y – функция реакции одноканальной системы.

В дальнейшем детально будет рассматриваться одноканальная линейная дискретная система (ЛДС) с одним входом и одним выходом.

Линейная дискретная система обладает следующими свойствами:

1. **Линейность.** Система называется линейной, если она удовлетворяет двум условиям:

- ее реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий (свойство аддитивности или принцип суперпозиции):

$$F(x_1 + x_2 + x_3 + \dots) = F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + \dots; \quad (8.14)$$

- реакции на воздействие, умноженное на весовой коэффициент a , соответствует реакция на воздействие без коэффициента, умноженная на тот же коэффициент a (свойство однородности):

$$F(ax) = aF(x). \quad (8.15)$$

2. **Дискретность.** Система называется дискретной, если она преобразует входной дискретный сигнал $x(nT)$ в выходной дискретный сигнал $y(nT)$, которые могут быть вещественными или комплексными функциями (**рис. 8.5**).



Рис. 8.5. К определению линейной дискретной системы

3. Стационарность. Дискретная система называется стационарной, если ее реакция не зависит от начала отсчета времени (свойство инвариантности во времени), т.е. при любом целом значении m :

$$y(n) = y(n + m). \quad (8.16)$$

Из данного свойства следует, что параметры стационарной системы должны быть неизменны во времени.

В стационарных дискретных системах задержка воздействия на время mT ($m > 0$) приводит к задержке реакции на то же время

$$x(n - m) \Rightarrow y(n - m). \quad (8.17)$$

4. Начальные условия. В общем случае начальные условия в системе могут быть нулевыми или ненулевыми.

Признаком нулевых начальных условий является отсутствие реакции $y(n)=0$ при отсутствии воздействия $x(n)=0$.

Признаком ненулевых начальных условий является наличие ненулевых значений реакции (свободных колебаний) $y(n) \neq 0$ при отсутствии воздействия $x(n)=0$.

5. **Физическая реализуемость.** Дискретная система физически реализуема, если для нее выполняются условия:

- при нулевых начальных условиях реакция не может возникнуть раньше воздействия;
- значения реакции $y(n)$ в каждый момент времени n зависят от текущего значения воздействия $x(n)$ и его предшествующих значений $x(n - m)$, $m > 0$, но не зависят от последующих значений воздействия $x(n+m)$, $m > 1$.

Таким образом, условия физической реализуемости отображают причинно-следственную связь реакции с воздействием (принцип причинности).

8.4. Анализ соотношения вход/выход для ЛДС во временной области

Для анализа ЛДС во временной области используются импульсные $h(n)$ и переходные $g(n)$ характеристики.

Импульсная характеристика $h(n)$ дискретной системы, определяется реакцией ЛДС на цифровой единичный импульс $u_0(n)$ (рис. 8.6).

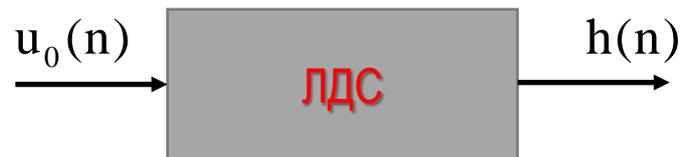


Рис. 8.6. Пояснение о импульсной характеристике

Переходная характеристика $g(n)$ определяется реакцией ЛДС на цифровой единичный скачок $u_1(n)$ (рис. 8.7).

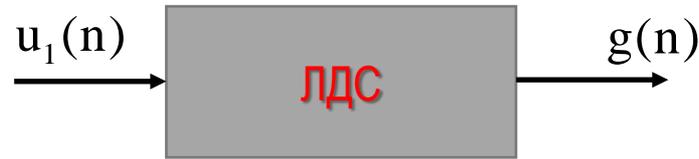


Рис. 8.7. Пояснение о переходной характеристике

Между дискретными переходной и импульсной характеристиками, как и в аналоговых системах, существует связь

$$g(n) = \sum_{m=0}^n h(m). \quad (8.18)$$

При известной импульсной характеристике соотношение между выходным $y(n)$ и входным $x(n)$ сигналами определяется дискретной сверткой $y(n)=x(n)*h(n)$ (рис. 8.8):

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad \text{или} \quad y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(n-m)h(m). \quad (8.19)$$



Рис. 8.8. Пояснение о соотношении вход/выход через свертку

Для физической реализуемости ЛДС входная последовательность $x(n)$ и импульсная характеристика $h(n)$ конечны и ограничены N и M последовательностями. В этом случае выходные последовательности **(8.19)** будут ограничены $L=N+M-1$ значениями:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x(m)h(n-m), \quad y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x(n-m)h(m). \quad (8.20)$$

Так как последовательности $x(n)$ и $h(n)$ при свертке зеркально расходятся, то для конечных последовательностей при $n \geq L$, $y(n)=0$.

Пример: для заданных конечных воздействий $x(0)=3$; $x(1)=2$ ($N=2$) и импульсной характеристике $h(0)=1$; $h(1)=2$; $h(2)=1$ ($M=3$) количество значений свертки будет ограничено $L=2+3-1=4$:

$$y(0) = x(0)h(0) + x(1)h(-1) = 3 \times 1 + 2 \times 0 = 3;$$

$$y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) = 3 \times 2 + 2 \times 1 = 8;$$

$$y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) = 3 \times 1 + 2 \times 2 = 7;$$

$$y(3) = x(0)h(3) + x(1)h(2) = 3 \times 0 + 2 \times 1 = 2;$$

$$y(4) = x(0)h(4) + x(1)h(3) = 3 \times 0 + 2 \times 0 = 0.$$

В случае же если входная последовательность $x(n)$ и/или импульсная характеристика $h(n)$ бесконечны, выходная последовательность тоже будет бесконечна $L=\infty$: $y(n) \neq 0$ для любых $n \geq 0$.

8.5. Разностное уравнение. Рекурсивные и нерекурсивные линейные дискретные системы

Кроме свертки, для связи выходной и входной дискретной последовательности (соотношение вход/выход) ЛДС используется разностное уравнение (РУ):

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k), \quad (8.21)$$

где b_i и a_k – коэффициенты (вещественные константы), определяющие внутренние параметры ЛДС; $x(n)$ и $y(n)$ – воздействие и реакция ЛДС; i и k – значения задержек последовательностей $x(n-i)$ и $y(n-k)$.

Линейная дискретная система называется рекурсивной, если хотя бы один из коэффициентов a_k , $k=1, 2, \dots, M-1$ РУ (8.21) отличен от нуля.

Порядок рекурсивной ЛДС определяется порядком РУ: $\max \{(M-1), (N-1)\}$.

Например: $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1)$ – это уравнение первого порядка, а $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 x(n-2)$ – уравнение второго порядка.

Линейная система называется **нерекурсивной**, если все ее коэффициенты a_k , $k=1, 2, \dots, M-1$ РУ **(8.10)** равны нулю:

$$a_k = 0, k = 0, 1, 2, \dots, M-1.$$

В результате РУ примет вид

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i). \quad (8.22)$$

Порядок **нерекурсивного РУ** определяется аналогично

$$\max \{N-1\}.$$

Например, уравнение $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$ – уравнение второго порядка.

Для анализа реакции ЛДС используется свертка **(8.20)**, в которой, если вместо входной последовательности подать цифровой единичный импульс $u_0(n)$, выходная последовательность будет импульсной характеристикой, описываемой РУ. Так, для рассмотренного примера **нерекурсивной ЛДС** импульсная характеристика будет определяться выражением

$$h(n) = b_0 u_0(n) + b_1 u_0(n-1) + b_2 u_0(n-2).$$

Значения этой последовательности определены:

$$h(0) = b_0 u_0(0) + b_1 u_0(-1) + b_2 u_0(-2) = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = b_0;$$

$$h(1) = b_0 u_0(1) + b_1 u_0(0) + b_2 u_0(-1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 = b_1;$$

$$h(2) = b_0 u_0(2) + b_1 u_0(1) + b_2 u_0(0) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 = b_2;$$

$$h(3) = b_0 u_0(3) + b_1 u_0(2) + b_2 u_0(1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = 0;$$

$$h(n) = 0, \text{ при } n \geq 3.$$

То есть если импульсная характеристика ЛДС конечна, то ее реакция всегда имеет конечную длительность. Такие ЛДС называют системами с конечной импульсной характеристикой (КИХ-системой).

Если в качестве импульсной характеристики используется рекурсивное РУ любого порядка, то реакция ЛДС будет всегда иметь бесконечную последовательность. Такие системы называют системами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-системой).

Так, например, для $h(n) = b_0 u_0(n) - a_1 h(n-1)$:

$$h(0) = b_0 u_0(0) - a_1 h(-1) = b_0 \cdot 1 - a_1 \cdot 0 = b_0;$$

$$h(1) = b_0 u_0(1) - a_1 h(0) = b_0 \cdot 0 - a_1 \cdot b_0 = -a_1 \cdot b_0;$$

$$h(2) = b_0 u_0(2) - a_1 h(1) = b_0 \cdot 0 - a_1 \cdot (-a_1 \cdot b_0) = a_1^2 \cdot b_0;$$

$$h(3) = b_0 u_0(3) - a_1 h(2) = b_0 \cdot 0 - a_1 \cdot (a_1^2 \cdot b_0) = -a_1^3 \cdot b_0;$$

$$h(n) = (-1)^n a_1^n \cdot b_0.$$

Перечень контрольных вопросов:

1. Типовые дискретные сигналы и их свойства.
2. Основная полоса частот линейной дискретной системы. Нормированные частоты.
3. Линейная дискретная система и ее свойства
4. Дискретная свертка и ее свойства.
5. Разностное уравнение для линейной дискретной системы.
6. Рекурсивные линейные дискретные системы (КИХ-системы).
7. Нерекурсивные линейные дискретные системы (БИХ-системы).



9. Анализ дискретных сигналов в Z-области

Учебные цели.

Изучить: способы Z-преобразований дискретных сигналов; свойства Z-преобразований; методы прямого и обратного Z-преобразований дискретных сигналов.

9.1. Z-преобразование дискретных сигналов и его свойства

Для анализа сигналов в комплексной плоскости используется **преобразование Лапласа**.

Прямое преобразование сигнала $x(t)$, ограниченного временем $t > 0$, в комплексную плоскость [в L-изображение – образ $X(p)$] определяется:

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad (9.1)$$

где $p = \sigma + j\omega$. Здесь $x(t)=0$ при $t < 0$.

Обратное преобразование из p -области в оригинал $x(t)$ во временное пространство определяется:

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(p)e^{pt} dp, \quad (9.2)$$

где p – оператор Лапласа; $p=\sigma+j\omega$.

Выполнить преобразование Лапласа возможно, если функция оригинала $x(t)$ является вещественной или комплексной функцией, непрерывной или кусочно-непрерывной, однозначно представляемой в области определения и имеющей экспоненциальный порядок $O(e^{-\lambda t})$ с ограничением возрастания

$$|x(t)| \leq Ae^{\lambda t}, \quad (9.3)$$

где $A \neq \infty$ и $\lambda \neq \infty$; $O(y)$ – оценка функции y .

Таким образом, преобразование Лапласа (9.1) справедливо только в области абсолютной сходимости

$$\int_0^{\infty} |x(t)e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} |x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}| dt = \int_0^{\infty} |x(t)| |e^{-j\omega t}| e^{-\sigma t} dt = \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty, \quad (9.4)$$

определяемой абсциссой сходимости σ_0 . На комплексной p -плоскости абсцисса определяется $\text{Re}\{p\}=\sigma \geq \sigma_0$.

При использовании дискретных сигналов $x(nT)$, где T – период дискретизации, применяют дискретное преобразование Лапласа:

$$X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT}. \quad (9.5)$$

Дискретное преобразование Лапласа (9.5) также ограничено только в области абсолютной сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)e^{-pnT}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)|e^{-\sigma nT} < \infty. \quad (9.6)$$

Для упрощения анализа сигналов в комплексной плоскости в цифровой технике используется **Z-преобразование** дискретных сигналов, которые определены только при $n \geq 0$ (при $n < 0$ значения $x(n) = 0$). Z-преобразование основано на преобразовании Лапласа с заменой переменной $z = e^{pT}$:

$$x(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}. \quad (9.7)$$

Так как $T = \text{const}$, в дальнейшем для упрощения анализа Z-преобразований значение T в выражении (9.7) опускается.

С учетом (9.5) дискретное Z-преобразование (9.7) применимо только в области абсолютной сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty. \quad (9.8)$$

В алгебраической форме $z = \xi + j\eta.$ (9.9)

В показательной форме $z = re^{j\varphi}.$ (9.10)

Здесь r – радиус значения z ; φ – его угол;

$$r = |z| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}. \quad (9.11)$$

Таким образом, производится переход из комплексной p -области в Z -область (рис. 9.1). Так, например, сигналу в p -области:

$$p = \sigma + j\omega = 1 + j0,5$$

будет соответствовать сигнал в Z -области:

$$z = \xi + j\eta = e^{1+j0,5} = e \cdot e^{j0,5} = e(\cos 0,5 + j\sin 0,5) = 2,71(0,88 + j0,48) = 2,4 + j1,3.$$

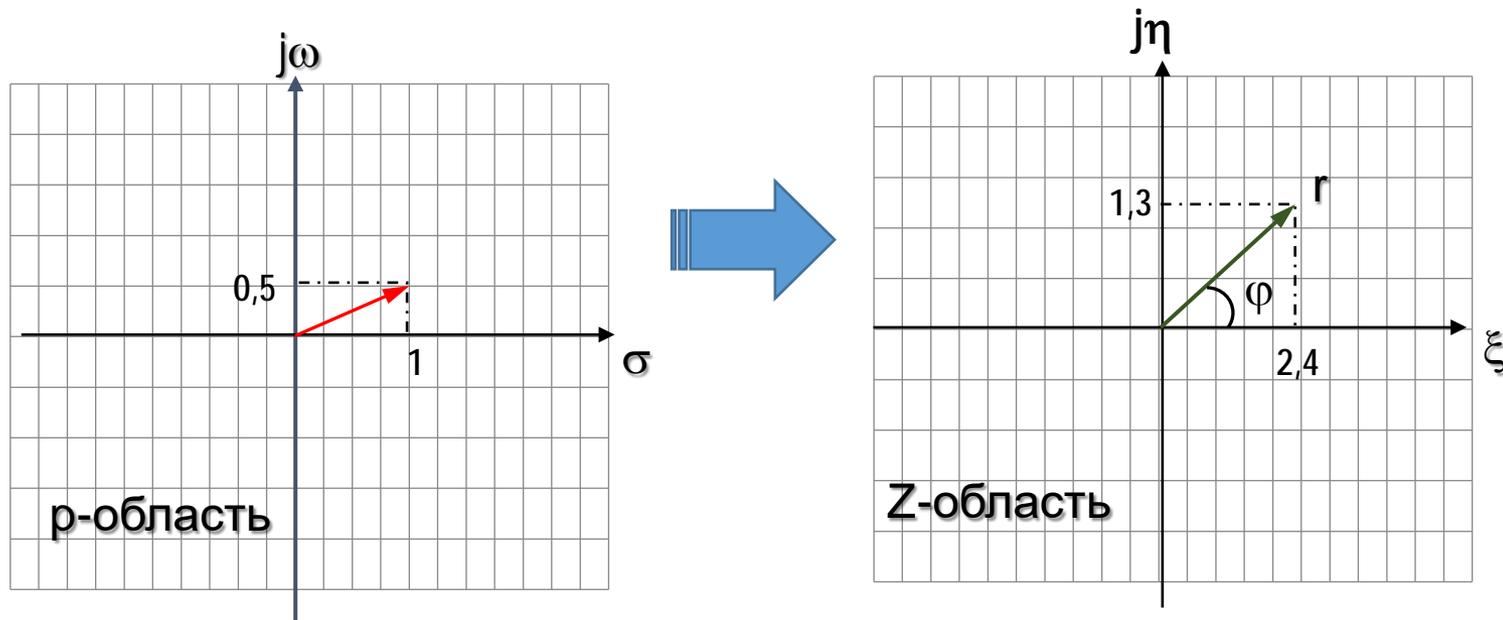


Рис. 9.1. Пример представления сигнала в комплексном пространстве в p-области и Z-области

Свойства Z-преобразования

1. Линейность.

Z-преобразование линейной комбинации последовательностей

$$y(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \dots \quad (9.12)$$

равна сумме их Z-преобразований:

$$Z\{y(n)\} = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n)z^{-n} + a_2 \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n)z^{-n} + \dots \quad (9.13)$$

2. Z-преобразование задержанной последовательности $x(n-m)$:

$$Z\{x(n-m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n} = Z\{x(n)\}z^{-m}. \quad (9.14)$$

Для доказательства введем обозначение $k = n - m$, откуда $n = k + m$. Подставив эту переменную в (9.14), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k+m=0}^{\infty} x(k)z^{-(k+m)} &= z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} x(k)z^{-k} = \\ &= z^{-m} \left[\sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \right]. \end{aligned}$$

С учетом того, что $x(k)|_{k<0} = 0$ и $\sum_{k=-m}^{-1} x(k)z = 0$,

получим:
$$Z\{x(n-m)\} = z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = Z\{x(n)\}z^{-m}.$$

3. Z-преобразование свертки последовательностей

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \quad (9.15)$$

определяется
$$Z\{y(n)\} = X\{x_1(n)\}X\{x_2(n)\}. \quad (9.16)$$

Докажем свойство **(9.16)**:

$$Z\{y(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2[(n-m)] \right] z^{-n}.$$

Изменим порядок суммирования:

$$Z\{y(n)\} = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) \left[\sum_{n=0}^{\infty} x_2(n-m)z^{-n} \right].$$

С учетом свойства **(9.14)** для задержанной последовательности в скобках:

$$Z\{y(n)\} = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)z^{-m}Z\{x_2(n)\}.$$

Откуда получим: $Z\{y(n)\} = Z\{x_1(n)\}Z\{x_2(n)\}.$

9.2. Z-преобразование типовых дискретных сигналов

1. Z-преобразование цифрового единичного импульса:

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (9.17)$$

$$Z\{u_0(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u_0(n)z^{-n} = u_0(0)z^{-0} = 1. \quad (9.18)$$

2. Z-преобразование задержанного цифрового единичного импульса:

$$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (9.19)$$

С учетом свойства [\(9.14\)](#):

$$Z\{u_0(n-m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u_0(n-m)z^{-n} = Z\{u_0(n)\}z^{-m} = z^{-m}. \quad (9.20)$$

3. Z-преобразование цифрового единичного скачка:

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (9.21)$$

$$Z\{u_1(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u_1(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}. \quad (9.22)$$

Если $|z^{-1}| < 1$, то ряд **(9.22)** сходится как сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = z^{-1}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q|^n = \frac{1}{1-q}. \quad (9.23)$$

Тогда

$$Z\{u_1(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}. \quad (9.24)$$

4. Z-преобразование задержанного цифрового единичного скачка:

$$u_1(n - m) = \begin{cases} 1, & n \geq m; \\ 0, & n < m. \end{cases} \quad (9.25)$$

$$Z\{u_1(n - m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u_1(n - m)z^{-n} = Z\{u_1(n)\}z^{-m} = \frac{z^{-m}}{1 - z^{-1}}. \quad (9.26)$$

5. Z-преобразование дискретной убывающей степенной функции:

$$x(n) = \begin{cases} (\pm a)^n, & n \geq 0, \quad |a| < 1; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (9.27)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm a)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm az^{-1})^n. \quad (9.28)$$

С учетом, что $|\pm az^{-1}| < 1$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm az^{-1})^n = \frac{1}{1 \mp az^{-1}}. \quad (9.29)$$

6. Z-преобразование тригонометрической последовательности:

$$x(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}. \quad (9.30)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} z^{-n} = \frac{z^2}{(z - r_* e^{j\varphi_*})(z - r_* e^{-j\varphi_*})}. \quad (9.31)$$

Значения z , при которых числитель Z-преобразования равен нулю, называются «нулями», а значения z , при которых знаменатель равен нулю, – «полюсами».

Для преобразования (9.31) нули соответствуют $z_0=0$, а полюсы $z_{*1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}$.

Эти характерные точки определяют область определения значений z (рис. 9.2).

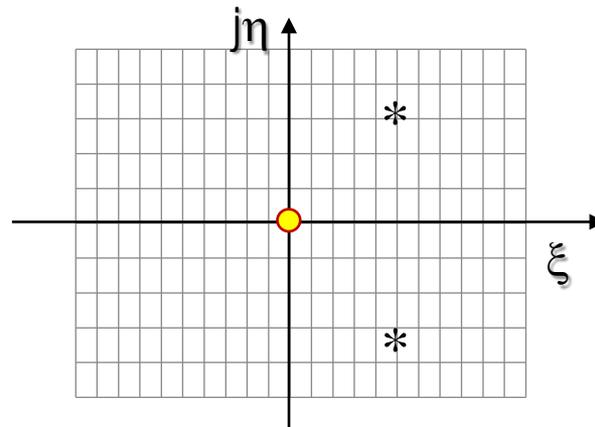


Рис. 9.2. Отображение 0 – нулей и * – полюсов сигнала на Z-плоскости

После преобразований

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2r_* \cos \varphi_* z^{-1} + r_*^2 z^{-2}}. \quad (9.32)$$

Обозначив $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*$ и $a_2 = r_*^2$,

$$X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}. \quad (9.33)$$

Для последующего математического анализа используют Z-преобразования, а при необходимости возврата к оригиналу последовательности $x(n)$ используют обратное Z-преобразование

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz. \quad (9.34)$$

Вычисление этого интеграла всегда затруднительно, поэтому на практике для определения обратного Z-преобразования используют таблицу соответствия прямого преобразования и его Z-изображения в обратном порядке (табл. 9.1).

Таблица. 9.1

Примеры Z-преобразований типовых последовательностей

№	Последовательность	Z-преобразование $X(z)$
1	$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$	$U_0(z) = 1$
2	$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$	$z^{-m}U_0(z) = z^{-m}$
3	$u_1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
4	$u_1(n - m) = \begin{cases} 1, & n \geq m; \\ 0, & n < m. \end{cases}$	$\frac{z^{-m}}{1 - z^{-1}}$
5	$x(n) = (\pm a)^n, \quad a < 1$	$\frac{1}{1 \mp az^{-1}}$
6	$x(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}$	$\frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$, где $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*$, $a_2 = r_*^2$

№	Последовательность	Z-преобразование $X(z)$
7	$x(n) = r_*^n \sin[(n\varphi_*)]$	$\frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$, где $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*$, $a_2 = r_*^2$, $b_1 = r_* \sin \varphi_*$
8	$x(n) = r_*^n \cos[(n\varphi_*)]$	$\frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$, где $a_1 = -2r_* \cos \varphi_*$, $a_2 = r_*^2$, $b_1 = r_* \cos \varphi_*$

Пример обратного Z-преобразования для выражения

$$X(z) = \frac{2z^{-5}}{1 - z^{-1}}.$$

Приведем выражение к табличному виду:

$$X(z) = 2 \frac{z^{-5}}{1 - z^{-1}}.$$

Это выражение соответствует Z-образу в пункте 4 табл. 9.1, умноженному на **2**.

В результате обратное Z-преобразование сигнала во временное пространство будет иметь вид сдвинутого на 5 отсчетов единичного скачка с амплитудой 2:

$$2u_1(n-5) = \begin{cases} 2, & n \geq 5; \\ 0, & n < 5. \end{cases}$$

Произведем обратное Z-преобразование другого выражения

$$X(z) = \frac{0,5}{1 - 0,1z^{-1} + 0,01z^{-2}}.$$

Приведем выражение к табличному виду:

$$X(z) = 0,5 \frac{1}{1 - 0,1z^{-1} + 0,01z^{-2}}.$$

Это выражение соответствует пункту 6 в табл. 9.1, на основании чего обратное Z-преобразование будет иметь вид

$$x(n) = 0,5r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}.$$

Определим коэффициенты: $r_* = \sqrt{a_2} = \sqrt{0,01} = 0,1$;

$$\varphi_* = \arccos \frac{a_1}{-2r_*} = \arccos \left(\frac{-0,1}{-2 \times 0,1} \right) = \arccos(0,5) = \frac{\pi}{3},$$

откуда:

$$x(n) = 0,5(0,1)^n \frac{\sin \left[(n+1) \frac{\pi}{3} \right]}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{0,5 \times 2(0,1)^n}{\sqrt{3}} \sin \left[(n+1) \frac{\pi}{3} \right].$$

После вычислений получим окончательное выражение

$$x(n) = \frac{(0,1)^n}{\sqrt{3}} \sin \left[(n+1) \frac{\pi}{3} \right].$$

Перечень контрольных вопросов:

1. [Преобразование Лапласа и его свойства.](#)
2. [Z-преобразование дискретных сигналов.](#)
3. [Свойства Z-преобразований линейных дискретных последовательностей.](#)
4. [Z-преобразования типовых линейных дискретных последовательностей.](#)

10. Анализ передаточных функций линейных дискретных систем с помощью Z-преобразований

Учебные цели.

Изучить: метод анализа передаточных характеристик с помощью Z-преобразований; методы анализа передаточных функций линейных дискретных систем в Z-области, а также способы построения структурных схем линейных дискретных систем.

10.1. Определение передаточных функций линейных дискретных систем по Z-преобразованию разностного уравнения

Определим передаточную функцию ЛДС в Z-области, для чего получим Z-преобразование его импульсной характеристики $h(n)$:

$$Z\{h(n)\} = H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}. \quad (10.1)$$

Так как импульсная характеристика связывает выходной и входной сигнал сверткой:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n)x(n - m), \quad (10.2)$$

то с учетом **3-го** свойства [\(9.16\)](#) Z-преобразование свертки **(10.2)**:

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad (10.3)$$

откуда получим передаточную функцию линейной дискретной системы:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (10.4)$$

Определим передаточную функцию в Z-области, если для ЛДС задана РУ:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n - i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n - k), \quad (10.5)$$

$$Y(z) = Z \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k) \right\} = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} - Y(z) \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}. \quad (10.6)$$

Приведем подобные члены уравнения

$$Y(z) \left[1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k} \right] = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} \quad (10.7)$$

и получим соотношение **вход/выход** через передаточную функцию **(10.3)**:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} X(z). \quad (10.8)$$

Откуда передаточная функция будет определяться:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}. \quad (10.9)$$

Как видно, передаточная функция **(10.9)** не зависит от входного сигнала и зависит только от параметров ЛДС (ЛДФ) a_k и b_i .

Анализ передаточных функций дает следующие соответствия с разностным уравнением: задержка отсчета $X(n-i)$ отображается в передаточной функции степенью Z^{-i} , а коэффициент b_i сохраняется:

$$\begin{aligned} b_i x(n-i) &\rightarrow b_i z^{-i}; \\ a_k y(n-k) &\rightarrow a_k z^{-k}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Простейшие ЛДФ описываются передаточными функциями 1-го и 2-го порядков. Например, передаточной функции для звена 1-го порядка

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (10.11)$$

соответствует разностное уравнение

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1). \quad (10.12)$$

Для передаточной функции звена 2-го порядка

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (10.13)$$

соответствует разностное уравнение

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2). \quad (10.14)$$

Расчет выходного сигнала ЛДС по передаточным функциям вначале осуществляется в Z -области:

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad (10.15)$$

а затем путем обратного Z -преобразования получают выходную дискретную последовательность:

$$y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\}. \quad (10.16)$$

10.2. Структурные схемы линейных дискретных систем

Для описания алгоритма вычисления реакции ЛДС используются структурные схемы, в которой применяются следующие основные элементы (**рис. 10.1**): элемент задержки на период дискретизации T (регистр сдвига); умножитель на константу и сумматор.

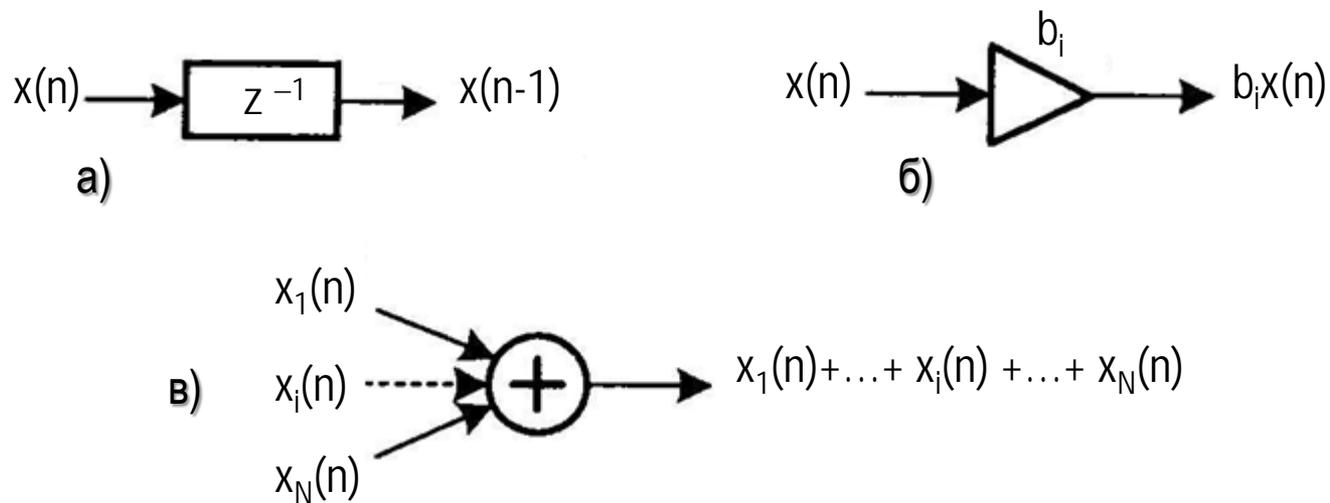


Рис. 10.1. Элементы структурных схем линейных дискретных систем:
 а – элемент задержки на период дискретизации T ; б – умножитель; в – сумматор

Структура рекурсивных ЛДС может быть представлена несколькими математическими выражениями. Для прямой структуры передаточная функция

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}, \quad (10.17)$$

которая определяется разностным уравнением (10.17). Так, например, для уравнения 2-го порядка

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2) \quad (10.18)$$

структура такой рекурсивной ЛДС имеет вид, показанный на **рис. 10.2**.

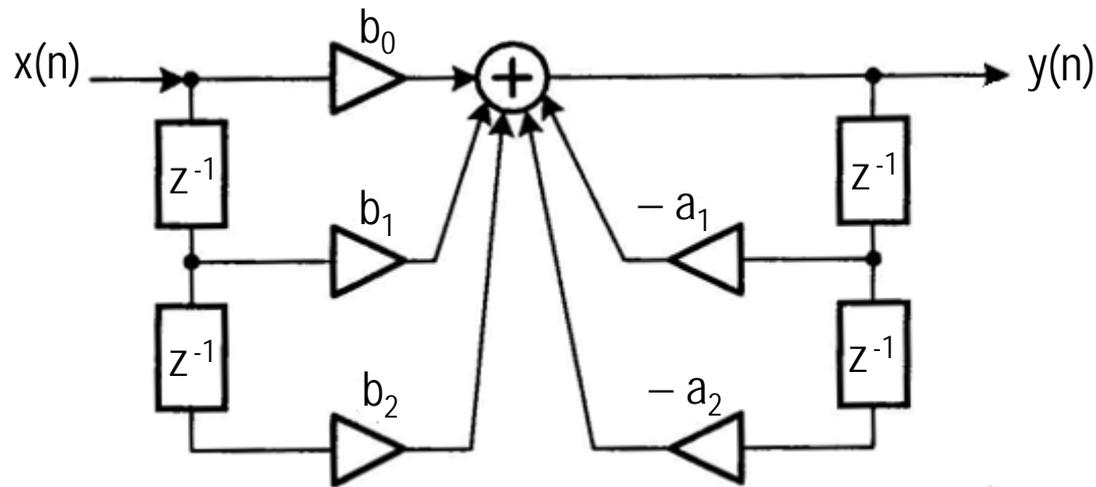


Рис. 10.2. Прямая структура звена 2-го порядка рекурсивной линейной системы

Другой формой является прямая каноническая структура. Различают три вида прямых канонических структур ЛДС.

Передаточную характеристику прямой канонической структуры 1

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} = \frac{V(z)}{X(z)} \frac{Y(z)}{V(z)} = H_1(z)H_2(z) \quad (10.19)$$

можно представить в виде рекурсивной части

$$H_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}, \quad (10.20)$$

для которой разностное уравнение

$$v(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k v(n-k), \quad (10.21)$$

и в виде нерекурсивной части

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}, \quad (10.22)$$

для которой разностное уравнение

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i v(n-i). \quad (10.23)$$

На **рис. 10.3** показана прямая каноническая структура нерекурсивной ЛДС второго порядка:

$$v(n) = x(n) - a_1 v(n-1) - a_2 v(n-2); \quad y(n) = b_0 v(n) + b_1 v(n-1) + b_2 v(n-2). \quad (10.24)$$

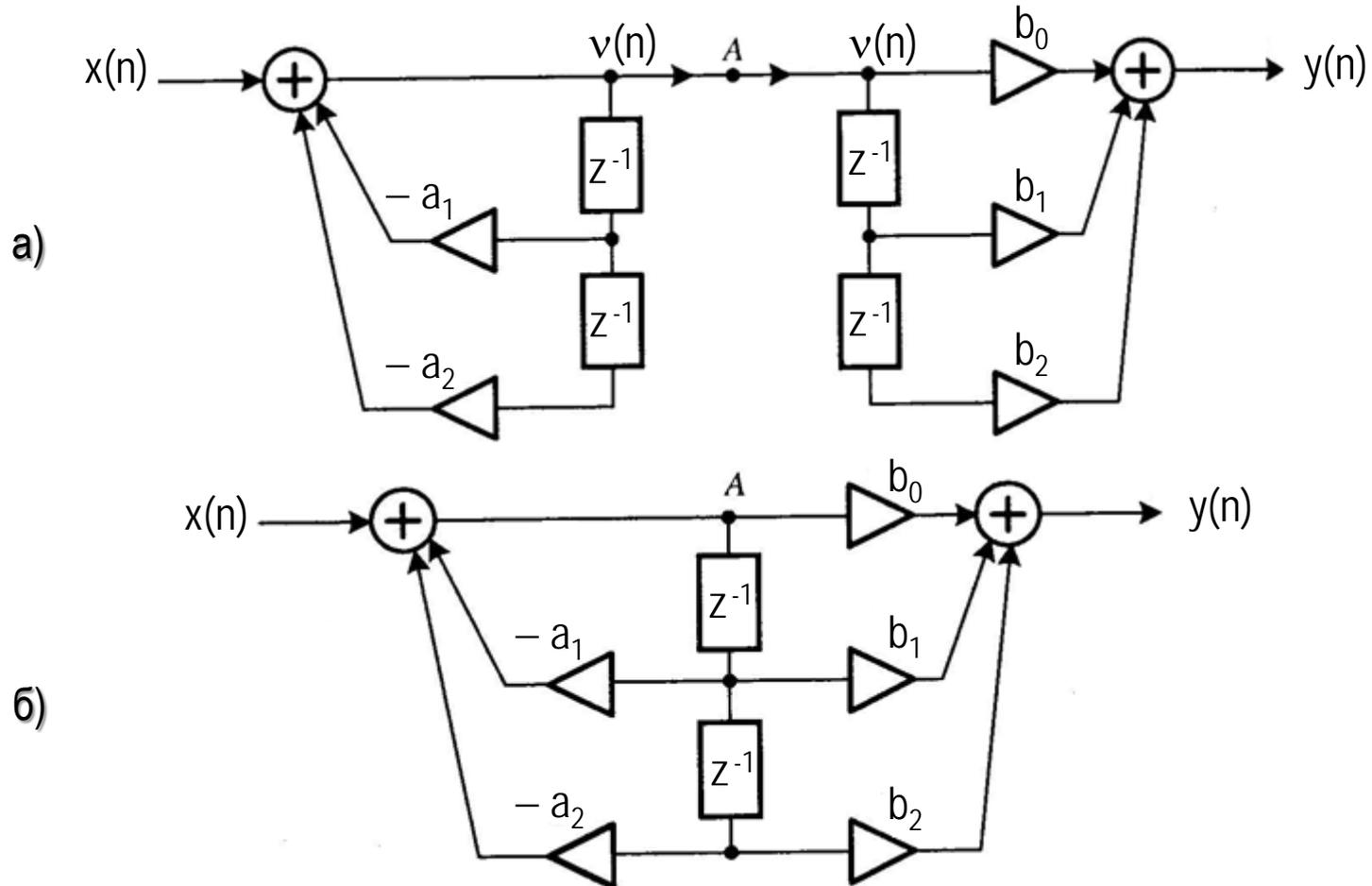


Рис. 10.3. Прямая каноническая структура 1 звена 2-го порядка:
 а – последовательно соединенные рекурсивная и нерекурсивная части;
 б – объединение двух линий задержки в одну

Для прямой канонической структуры 2 передаточная характеристика **(10.19)** представлена в другой форме, которая получается путем деления числителя на знаменатель по правилу деления многочленов при $N=M$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} = b_0 + \frac{b_0 + \sum_{k=1}^{M-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} - b_0 = \quad (10.25)$$

$$= b_0 + \frac{b_0 + \sum_{k=1}^{M-1} b_k z^{-k} - b_0 - b_0 \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} = b_0 + \frac{\sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} = H_{\text{нр}}(z) + H_p(z).$$

В результате передаточная функция **(10.25)** разлагается на нерекурсивную часть:

$$H_{\text{нр}}(z) = b_0, \quad (10.26)$$

и рекурсивную часть:

$$H_p(z) = \frac{\sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}. \quad (10.27)$$

Передаточной характеристике $H_{np}(z)$ (10.26) соответствует РУ:

$$y_{np}(n) = b_0 x(n). \quad (10.28)$$

Представим передаточную характеристику $H_p(z)$ (10.27) в виде произведения:

$$H_p(z) = \frac{V(z) Y_p(z)}{X(z) V(z)} = H_{p1}(z) H_{p2}(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}.$$

Передаточные характеристики сомножителей рекурсивного слагаемого $H_p(z)$ имеют вид:

$$H_{p1}(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}; \quad (10.29)$$

$$H_{p2}(z) = \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}. \quad (10.30)$$

Для каждой передаточной характеристики рекурсивной составляющей передаточной характеристики $H_p(z)$ **(10.29)** и **(10.30)** соответствует РУ:

$$v(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k v(n-k); \quad (10.31)$$

$$y_p(n) = \sum_{k=1}^{M-1} b_k - b_0 a_k v(n-k). \quad (10.32)$$

Таким образом, передаточную характеристику **(10.25)** можно представить в виде:

$$H(z) = H_{np}(z) + H_{p1}(z)H_{p2}(z) = b_0 + \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}. \quad (10.33)$$

В качестве примера рассмотрим прямую каноническую структуру 2 для передаточной характеристики звеньев 2-го порядка:

$$H(z) = b_0 + \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} [(b_1 - b_0 a_1) z^{-1} + (b_2 - b_0 a_2) z^{-2}], \quad (10.34)$$

которому соответствует РУ:

$$\begin{cases} y(n) = b_0x(n) + (b_1 - b_0a_1)v(n-1) + (b_2 - b_0a_2)v(n-2); \\ v(n) = x(n) - a_1v(n-1) + a_2v(n-2). \end{cases} \quad (10.35)$$

На **рис. 10.4** показана схема канонической структуры 2 для звена 2-го порядка.

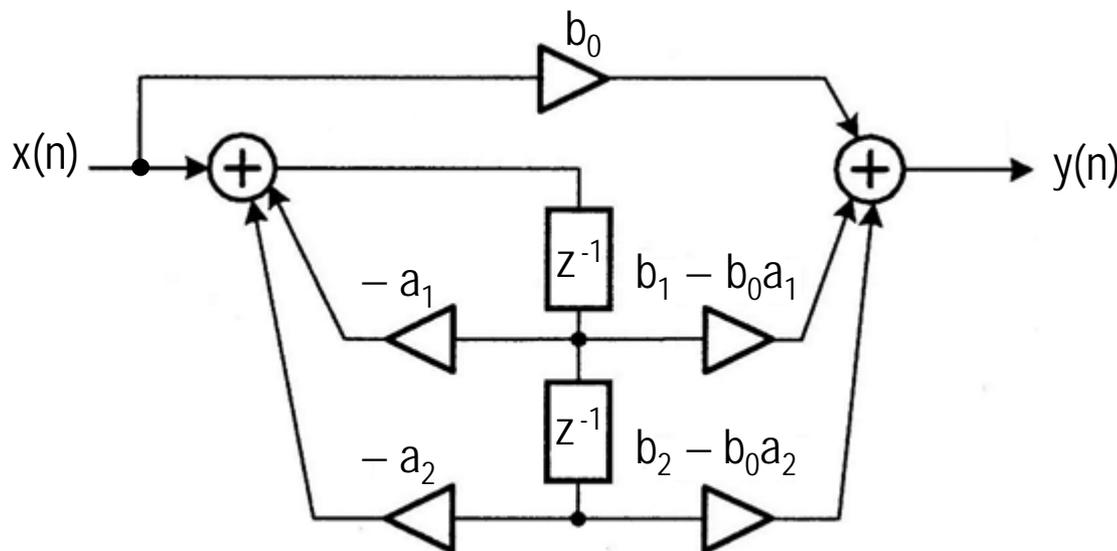


Рис. 10.4. Каноническая структура 2 звена 2-го порядка

Другая каноническая структура 3 передаточной характеристики (10.19) представляется в следующем виде.

Умножим левую и правую часть (10.19) на $\left(1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}\right)$ при $N=M$:

$$H(z) \left(1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \left(1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}\right), \quad (10.36)$$

Преобразовав (10.36), получим

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i} - H(z) \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}. \quad (10.37)$$

Далее разложим выражение (10.37) по принципу «матрешки»:

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0 + \sum_{i=1}^{M-1} b_i z^{-i} - H(z) \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k} = \\ &= b_0 + z^{-1} \left[b_1 - H(z) a_1 + \left(\sum_{i=2}^{M-1} b_i z^{-i} - H(z) \sum_{k=2}^{M-1} a_k z^{-k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Пользуясь принципом **(10.38)**, проведем поэтапное разложение передаточной функции **(10.37)** на несколько вложенных в друг друга функций:

$$\left\{ \begin{array}{l} H(z) = b_0 + z^{-1}H_1(z); \\ H_1(z) = b_1 - a_1H(z) + z^{-1}H_2(z); \\ H_2(z) = b_2 - a_2H(z) + z^{-1}H_3(z); \\ \dots \\ H_{M-1}(z) = b_{M-1} - a_{M-1}H(z). \end{array} \right. \quad (10.39)$$

Умножим левую и правую часть каждого выражения **(10.39)** на $X(z)$ и введем обозначение:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(z) = H(z)X(z); \\ V_1(z) = H_1(z)X(z); \\ V_2(z) = H_2(z)X(z); \\ \dots \\ V_{M-1}(z) = H_{M-1}(z)X(z), \end{array} \right. \quad (10.40)$$

на основании чего получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1} V_1(z); \\ V_1(z) = b_1 X(z) - a_1 Y(z) + z^{-1} V_2(z); \\ V_2(z) = b_2 X(z) - a_2 Y(z) + z^{-1} V_3(z); \\ \dots \\ V_{M-1}(z) = b_{M-1} X(z) - a_{M-1} Y(z). \end{array} \right. \quad (10.41)$$

Z-преобразованию **(10.41)** соответствует РУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(n) = b_0 x(n) + v_1(n-1); \\ v_1(n) = b_1 x(n) - a_1 y(n) + v_2(n-1); \\ v_2(n) = b_2 x(n) - a_2 y(n) + v_3(n-1); \\ \dots \\ v_{M-1}(n) = b_{M-1} x(n) - a_{M-1} y(n). \end{array} \right. \quad (10.42)$$

Полученная система РУ **(10.42)** решается снизу вверх и отображает каноническую структуру 3.

В качестве примера рассмотрим каноническую структуру 3 (передаточные функции и разностные уравнения) для звена 2-го порядка:

$$\begin{cases} H(z) = b_0 + z^{-1}H_1(z); \\ H_1(z) = b_1 - a_1H(z) + z^{-1}H_2(z); \\ H_2(z) = b_2 - a_2H(z), \end{cases} \quad \begin{cases} y(n) = b_0x(n) + v_1(n-1); \\ v_1(z) = b_1x(n) - a_1y(n) + v_2(n-1); \\ v_2(z) = b_2x(n) - a_2y(n). \end{cases} \quad (10.43)$$

На **рис. 10.5** показана схема канонической структуры 3 для рассмотренного звена 2-го порядка.

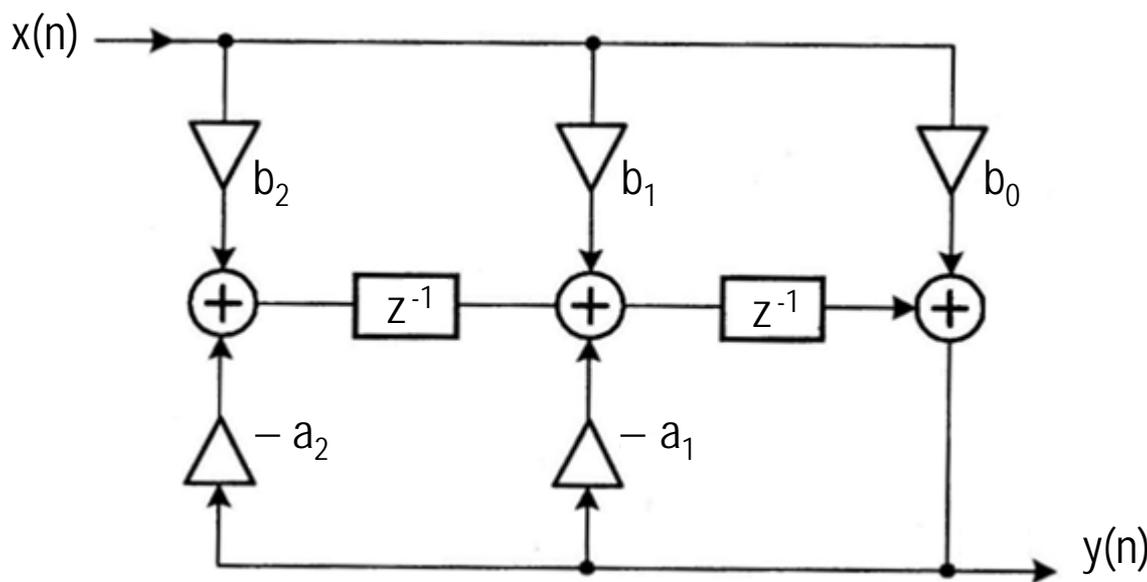


Рис. 10.5. Каноническая структура 3 звена 2-го порядка

Каскадная структура. В более сложных системах используется передаточная характеристика

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z). \quad (10.44)$$

Для наглядности рассмотрим пример использования звеньев 2-го порядка:

$$H(z) = \prod_{k=1}^K \left(\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right), \quad (10.45)$$

где b_{0k} , b_{1k} , b_{2k} , a_{1k} и a_{2k} – вещественные коэффициенты k -х звеньев; K – количество звеньев 2-го порядка.

Передаточной функции (10.45) при использовании прямой структуры всех звеньев соответствует система РУ:

$$\begin{cases} v_1(n) = b_{01}x(n) + b_{11}x(n-1) + b_{21}x(n-2) - a_{11}v_1(n-1) - a_{21}v_1(n-2); \\ v_2(n) = b_{02}x(n) + b_{12}x(n-1) + b_{22}x(n-2) - a_{12}v_2(n-1) - a_{22}v_2(n-2); \\ \dots \\ y(n) = b_{0,K-1}v_{K-1}(n) + b_{1,K-1}v_{K-1}(n-1) + b_{2,K-1}v_{K-1}(n-2) - a_{1,K-1}y(n-1) - a_{2,K-1}y(n-2), \end{cases}$$

из которой следует, что реакция k -го звена, служит воздействием для очередного $(k+1)$ -го звена и так далее.

Следовательно, передаточной функции (10.44) соответствует каскадная структура (рис. 10.6), каждый каскад которой может быть представлен в ранее рассмотренных структурах.

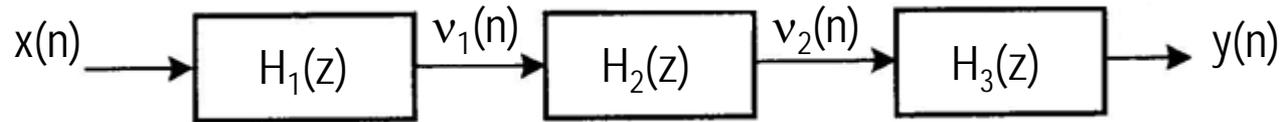


Рис. 10.6. Каскадная структура трех звеньев

Параллельная структура. Параллельная структура определяется суммой передаточных характеристик

$$H(z) = \sum_{k=1}^K H_k(z). \quad (10.46)$$

Для примера рассмотрим вариант передаточной характеристики суммы звеньев 2-го порядка:

$$H(z) = \sum_{k=1}^K \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}, \quad (10.47)$$

где b_{0k} , b_{1k} , a_{1k} и a_{2k} – вещественные коэффициенты k -х звеньев; K – количество звеньев 2-го порядка.

Умножив левую и правую часть выражения **(10.47)** на $X(z)$, получим реакцию:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \sum_{k=1}^K \left(\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) X(z). \quad (10.48)$$

Обозначив

$$V_k(z) = H_k(z)X(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} X(z), \quad (10.49)$$

соотношение вход/выход **(10.48)** примет вид

$$Y(z) = \sum_{k=1}^K V_k(z). \quad (10.50)$$

Путем обратного Z-преобразования **(10.50)** получим РУ

$$y(n) = \sum_{k=1}^K v_k(n), \quad (10.51)$$

где
$$v_k(n) = b_{0k}x(n) + b_{1k}x(n-1) - a_{1k}y(n-1) + a_{2k}y(n-2). \quad (10.52)$$

Таким образом, реакция ЛДС **(10.47)** определяется суммой реакций отдельных звеньев, что соответствует параллельному соединению рекурсивных звеньев 2-го порядка.

В качестве примера на **рис. 10.7** показана параллельная структура трех звеньев.

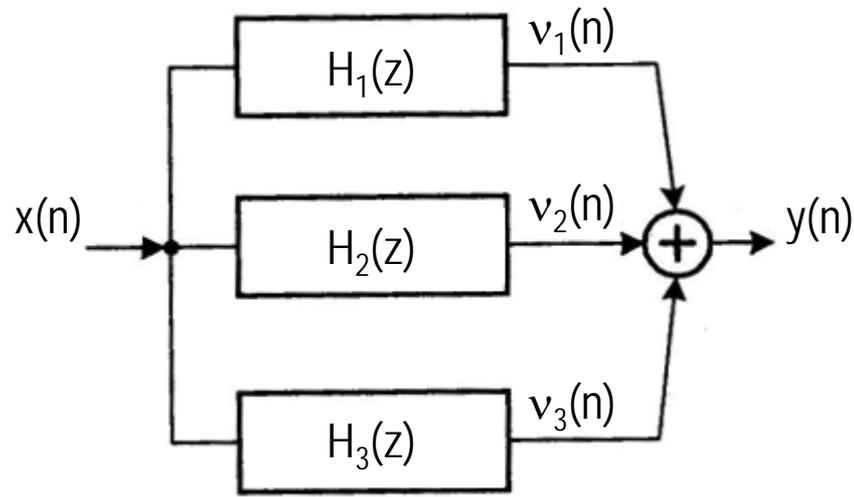


Рис. 10.7. Параллельная структура трех звеньев

Структуры нерекурсивных ЛДС. При использовании сложных ЛДС с нерекурсивными звеньями схема их структур упрощается.

Прямая нерекурсивная ЛДС, представляемая передаточной характеристикой

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} \quad (10.53)$$

отображается РУ

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i), \quad (10.54)$$

структура которой имеет вид (рис. 10.8).

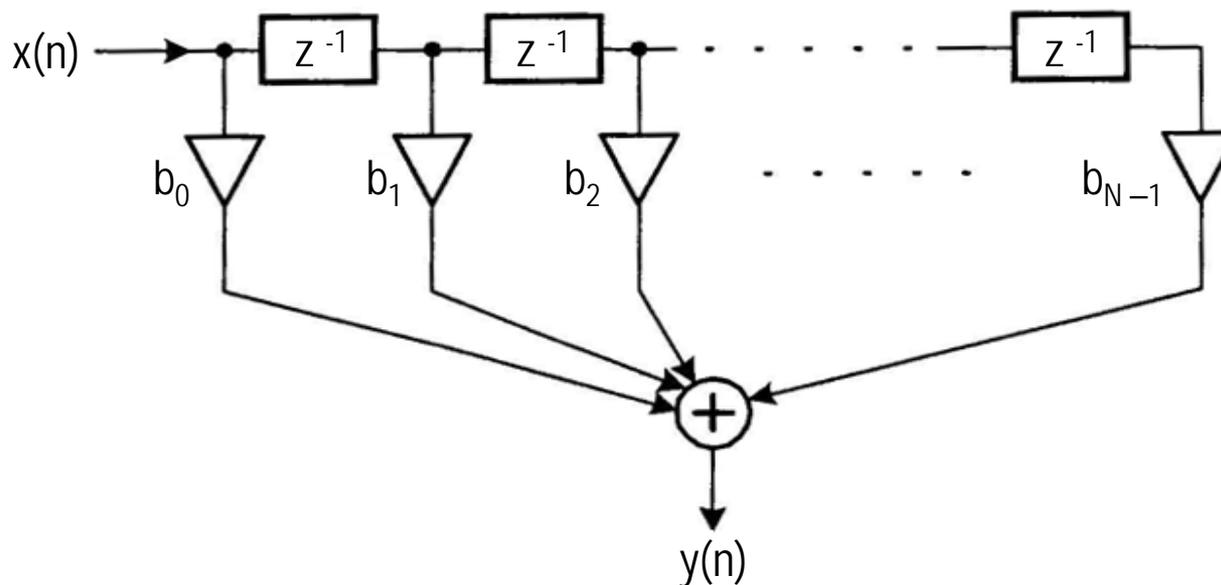


Рис. 10.8. Прямая структура нерекурсивной линейной дискретной системы

Рассмотрим видоизменение каскадных нерекурсивных структур.
Для примера, проведем вариант звеньев 2-го порядка:

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) = \prod_{k=1}^K (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}), \quad (10.55)$$

где b_{0k} , b_{1k} , b_{2k} – вещественные коэффициенты k -х нерекурсивных звеньев 2-го порядка; K – общее количество звеньев.

Передаточной функции **(10.55)** соответствует РУ:

$$\begin{cases} v_1(n) = b_{01}x(n) + b_{11}x(n-1) + b_{21}x(n-2); \\ v_2(n) = b_{02}x(n) + b_{12}x(n-1) + b_{22}x(n-2); \\ \dots \\ y(n) = b_{0,K-1}v_{K-1}(n) + b_{1,K-1}v_{K-1}(n-1) + b_{2,K-1}v_{K-1}(n-2), \end{cases} \quad (10.56)$$

которая отображается параллельной структурой ([см. рис. 10.7](#)) со звеньями, показанными на **рис. 10.9**.

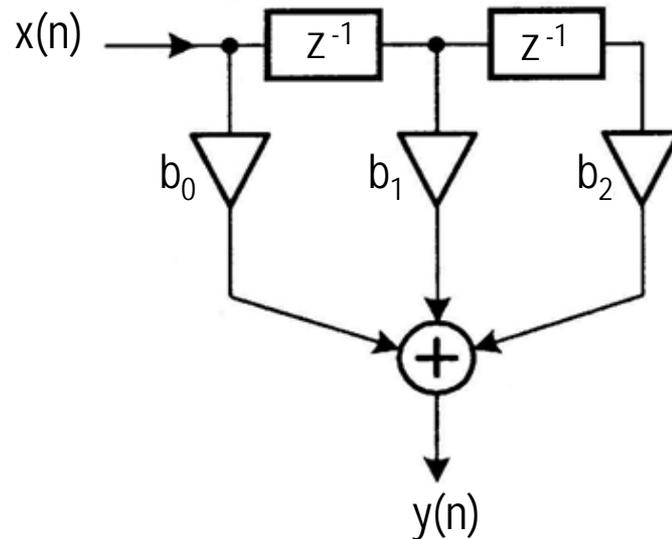


Рис. 10.9. Прямая структура нерекурсивного звена 2-го порядка

Выбор структуры ЛДС

С учетом многообразия вариантов ЛДС, критерий выбора той или иной структуры определяется минимальной ее сложностью, т.е. схемой, имеющей меньшее число элементов и, как следствие, меньшее число требуемых математических операций, необходимых для ее реализации. Это в целом повышает скорость работы ЛДС и снижает погрешность вычислений, которые вносят вклад в общие шумы цифровой системы.

Перечень контрольных вопросов:

1. Определение передаточных функций линейных дискретных систем по Z-преобразованию разностного уравнения.
2. Прямая структура рекурсивной линейной дискретной системы.
3. Каноническая структура 1 рекурсивной линейной дискретной системы.
4. Каноническая структура 2 рекурсивной линейной дискретной системы.
5. Каноническая структура 3 рекурсивной линейной дискретной системы.
6. Каскадная структура рекурсивной линейной дискретной системы.
7. Параллельная структура рекурсивной линейной дискретной системы.
8. Прямая структура нерекурсивной линейной дискретной системы.
9. Каскадная структура нерекурсивной линейной дискретной системы.

11. Частотные характеристики линейных дискретных систем

Учебные цели.

Изучить: метод анализа частотных характеристик линейных дискретных систем и их связь с передаточными характеристиками в Z-области; методы экспресс-анализа частотных характеристик линейных дискретных систем.

11.1. Преобразование Фурье импульсной характеристики линейной дискретной системы

Для перевода характеристики ЛДС из Z-области в частотную область используется прямое преобразование Фурье импульсной характеристики:

$$K\{e^{j\omega T}\} = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)e^{-j\omega Tn} \quad (11.1)$$

или для нормированной частоты и времени:

$$K\{e^{j\hat{\omega}}\} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\hat{\omega}n}, \quad (11.2)$$

где $\hat{\omega}$ – нормированная круговая частота; $\hat{\omega} = \omega / f_d$, $\hat{\omega} \in [0, 2\pi]$;

$h(n)$ – импульсная характеристика ЛДС.

Преобразование Фурье – $K\{e^{j\hat{\omega}}\}$ называют комплексной частотной характеристикой (ЧХ) ЛДС.

Преобразование Фурье однозначно связывает спектр сигнал с дискретным сигналом, если выполняется ограничение

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)e^{-j\hat{\omega}n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| |e^{-j\hat{\omega}n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| < \infty. \quad (11.3)$$

При выполнении граничных условий **(11.3)** обратное преобразование Фурье [**см. (3.27)**] позволяет по известной ЧХ однозначно определить дискретную импульсную характеристику $h(n)$ ЛДС:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K\{e^{j\hat{\omega}}\} e^{j\hat{\omega}n} d\hat{\omega}. \quad (11.4)$$

В выражении (11.4) учтена ограниченность нормированной ЧХ ЛДС: $-\pi \leq \hat{\omega} \leq \pi$.

11.2. Связь частотной характеристики с передаточной функцией

Из анализа выражений преобразования Фурье (11.2) и Z-преобразования (9.7), можно заметить, что взаимный переход возможен путем замены

переменной $z = e^{j\hat{\omega}}$.

С учетом ограниченности функции $z = e^{j\hat{\omega}} \leq 1$, переход к ЧХ возможен, если область значений z передаточной функции будет ограничена окружностью единичного радиуса (рис. 11.1). Только в этом случае ЧХ будет однозначно связана с передаточной функцией в Z-области:

$$K\{e^{j\hat{\omega}}\} = H(z). \quad (11.5)$$

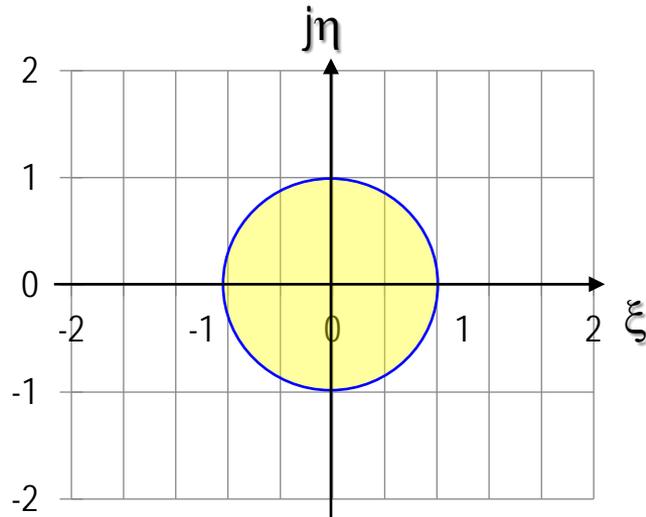


Рис. 11.1. Ограничение области значений z переходной функции для перехода в частотную область

Свойства преобразований Фурье дискретных сигналов

С учетом равенства (11.5), все свойства Z-преобразований распространяются на преобразование Фурье.

1. Линейность.

Преобразование Фурье суммы последовательностей:

$$y(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \dots \quad (11.6)$$

определяется:

$$Y\{e^{j\hat{\omega}}\} = a_1 X_1\{e^{j\hat{\omega}}\} + a_2 X_2\{e^{j\hat{\omega}}\} + \dots \quad (11.7)$$

2. Преобразование Фурье задержанной последовательности $x(n - m)$:

$$Y\{e^{j\hat{\omega}}\} = Y\{x(n - m)\} = X\{e^{j\hat{\omega}}\} e^{-j\hat{\omega}m}. \quad (11.8)$$

3. Преобразование Фурье свертки импульсной характеристики с входным сигналом

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n - m) \quad (11.9)$$

определяется

$$Y\{e^{j\hat{\omega}}\} = X_1\{e^{j\hat{\omega}}\} X_2\{e^{j\hat{\omega}}\}. \quad (11.10)$$

Из свойств передаточной функции ЛДС соотношение вход/выход в Z-области определяется выражением

$$Y(z) = H\{z\} X(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-k}} X(z). \quad (11.11)$$

Автоматически, заменив в (11.11) $z = e^{j\hat{\omega}}$, получим соотношение вход/выход в частотной области:

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = K \{e^{j\hat{\omega}}\} X(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{-ji\hat{\omega}}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\hat{\omega}}} X(e^{j\hat{\omega}}), \quad (11.12)$$

откуда выразим ЧХ:

$$K \{j\hat{\omega}\} = \frac{Y \{j\hat{\omega}\}}{X \{j\hat{\omega}\}} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{-j\hat{\omega}i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-j\hat{\omega}k}}. \quad (11.13)$$

С учетом формулы Эйлера $e^{j\hat{\omega}} = \cos \hat{\omega} + j \sin \hat{\omega}$ ЧХ можно представить в алгебраической форме: в виде реальной Re (действительной) и мнимой Im частей:

$$K \{j\hat{\omega}\} = \text{Re}(\hat{\omega}) + j \text{Im}(\hat{\omega}), \quad (11.14)$$

а также в показательной форме:

$$K \{j\hat{\omega}\} = \left| K \{e^{j\hat{\omega}}\} \right| e^{j\varphi(\hat{\omega})}, \quad (11.15)$$

где $A(\hat{\omega}) = \left| K \{ e^{j\hat{\omega}} \} \right|$ – амплитудно-частотная характеристика ЛДФ;

$$A(\hat{\omega}) = \left| K \{ e^{j\hat{\omega}} \} \right| = \sqrt{\operatorname{Re}(\hat{\omega})^2 + \operatorname{Im}(\hat{\omega})^2}; \quad (11.16)$$

$\varphi(\hat{\omega})$ – фазочастотная характеристика ЛДФ;

$$\varphi(\hat{\omega}) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\hat{\omega})}{\operatorname{Re}(\hat{\omega})}. \quad (11.17)$$

11.3. Экспресс-анализ частотной характеристики линейной дискретной системы

В качестве примера, определим частотную характеристику для КИХ фильтра 1-го порядка:

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{0,2 + 0,1z^{-1}}{1 + 0,2z^{-1}}. \quad (11.18)$$

Схема такого фильтра приведена на **рис. 11.2**.

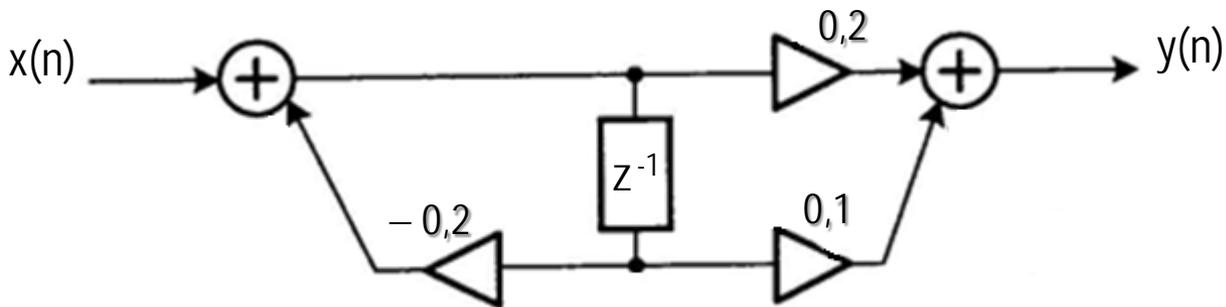


Рис. 11.2. Каноническая структурная схема БИХ-фильтра 1-го порядка

Заменяя в выражении $z = e^{j\hat{\omega}}$, получим ЧХ:

$$K_1(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{0,2 + 0,1e^{-j\hat{\omega}}}{1 + 0,2e^{-j\hat{\omega}}}. \quad (11.19)$$

Для определения АЧХ и ФЧХ фильтра воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{j\hat{\omega}} = \cos \hat{\omega} + j \sin \hat{\omega}:$$

$$K_1(j\hat{\omega}) = \frac{0,2 + 0,1 \cos \hat{\omega} - 0,1j \sin \hat{\omega}}{1 + 0,2 \cos \hat{\omega} - 0,2j \sin \hat{\omega}}, \quad (11.20)$$

на основании чего АЧХ фильтра примет вид

$$A_1(\hat{\omega}) = \frac{\sqrt{(0,2 + 0,1 \cos \hat{\omega})^2 + 0,01 \sin^2 \hat{\omega}}}{\sqrt{(1 + 0,2 \cos \hat{\omega})^2 + 0,04 \sin^2 \hat{\omega}}}, \quad (11.21)$$

а ФЧХ:

$$\varphi_1(\hat{\omega}) = \arctg \frac{0,2 \sin \hat{\omega}}{1 + 0,2 \cos \hat{\omega}} - \arctg \frac{0,1 \sin \hat{\omega}}{0,2 + 0,1 \cos \hat{\omega}}. \quad (11.22)$$

Для построения АЧХ и ФЧХ произведем экспресс-анализ ЧХ в пяти точках (табл. 11.1).

Таблица 11.1

Численные значения АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра 1-го порядка

$\hat{\omega}$, рад	$A_1(\hat{\omega})$	$\varphi_1(\hat{\omega})$, рад
0	0,25	0
$\pi/4$	0,24	-0,13
$\pi/2$	0,22	-0,27
$3\pi/4$	0,17	-0,33
π	0,13	0

По полученным характерным точкам построена АЧХ и ФЧХ фильтра (рис. 11.3).

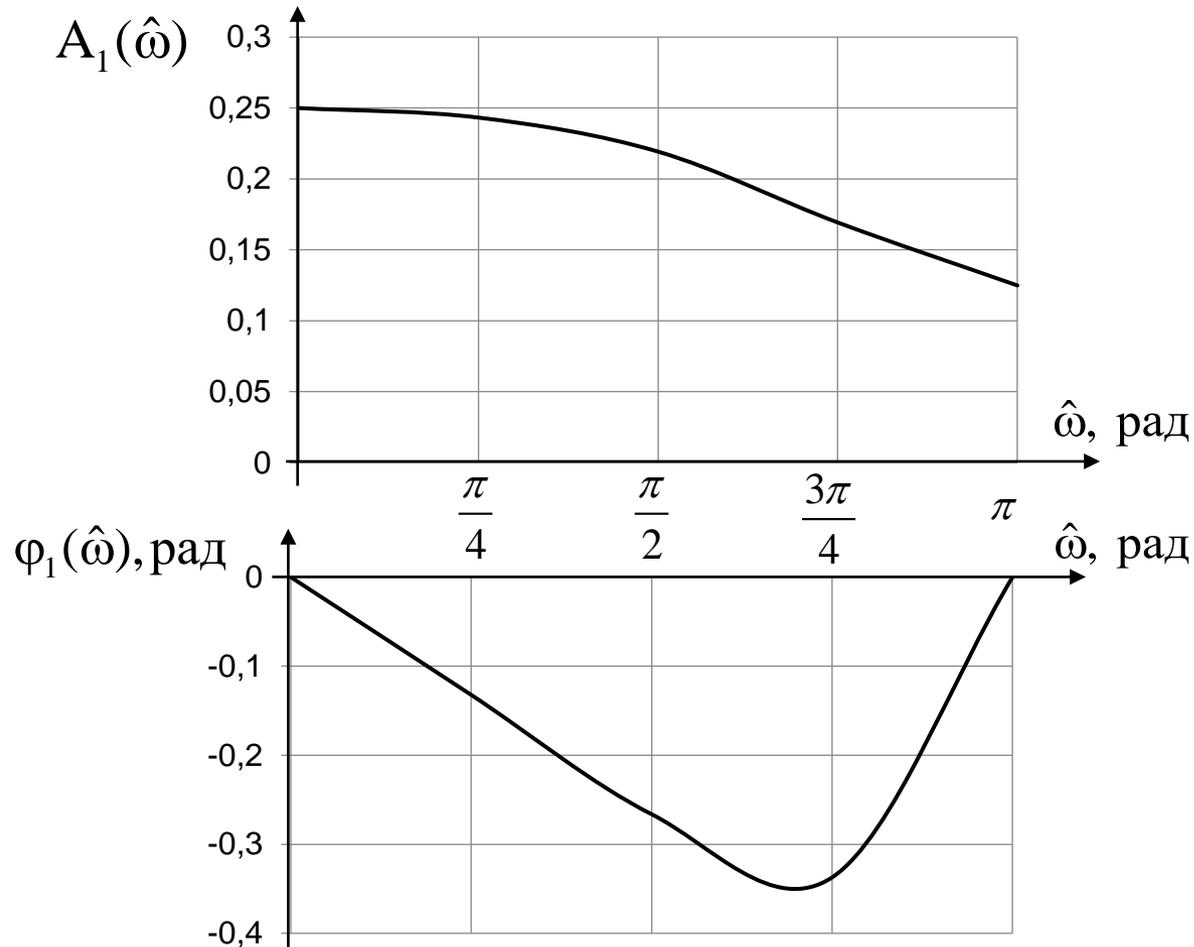


Рис. 11.3. Частотная характеристика БИХ-фильтра 1-го порядка: а – АЧХ, б – ФЧХ

Аналогично определим частотную характеристику для БИХ-фильтра 2-го порядка (рис. 11.4):

$$H_2(z) = \frac{Y_2(z)}{X_2(z)} = \frac{0,2 - 0,4z^{-1} + 0,8z^{-2}}{1 + 0,1z^{-1} + 0,1z^{-2}}. \quad (11.23)$$

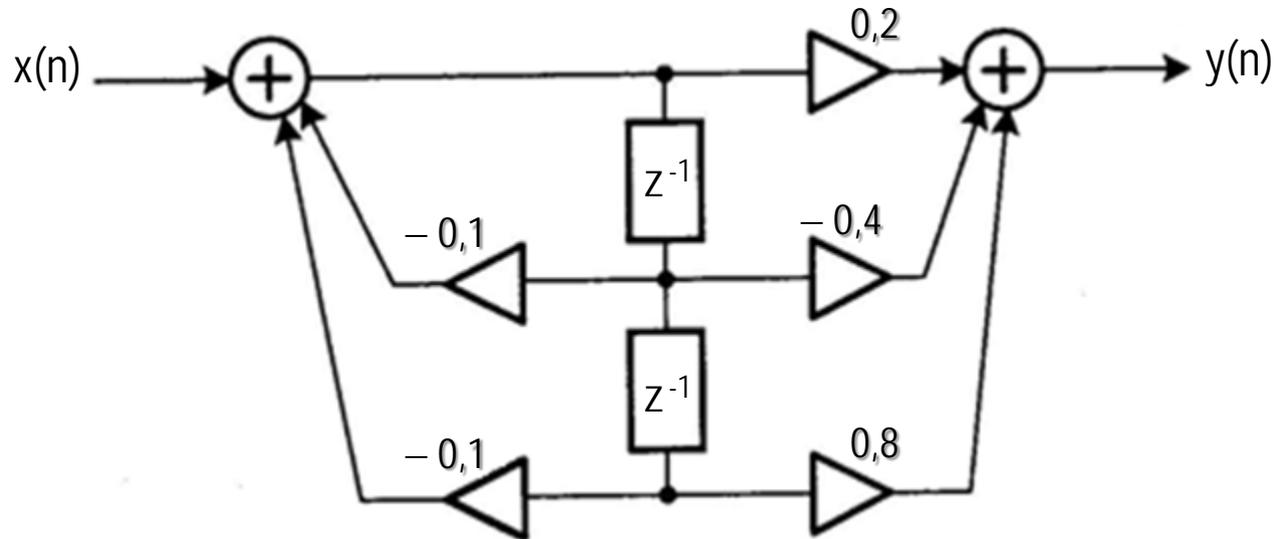


Рис. 11.4. Каноническая структурная схема БИХ-фильтра 2-го порядка

После замены $z = e^{j\hat{\omega}}$, получим ЧХ для БИХ-фильтра 2-го порядка:

$$K_2(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{0,2 - 0,4e^{-j\hat{\omega}} + 0,8z^{-j2\hat{\omega}}}{1 + 0,1z^{-j\hat{\omega}} + 0,1z^{-j2\hat{\omega}}}. \quad (11.24)$$

Также воспользовавшись функцией Эйлера, разложим числитель и знаменатель ЧХ в алгебраическую форму:

$$\begin{aligned} K_2(j\hat{\omega}) &= \frac{0,2 - 0,4 \cos \hat{\omega} + j0,4 \sin \hat{\omega} + 0,8 \cos 2\hat{\omega} - j0,8 \sin 2\hat{\omega}}{1 + 0,1 \cos \hat{\omega} - j0,1 \sin \hat{\omega} + 0,1 \cos 2\hat{\omega} - j0,1 \sin 2\hat{\omega}} = \\ &= \frac{0,2 - 0,4 \cos \hat{\omega} + 0,8 \cos 2\hat{\omega} + j(0,4 \sin \hat{\omega} - 0,8 \sin 2\hat{\omega})}{1 + 0,1(\cos \hat{\omega} + \cos 2\hat{\omega}) - j0,1(\sin \hat{\omega} + \sin 2\hat{\omega})}. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Из ЧХ получим выражение для АЧХ этого фильтра:

$$A_2(\hat{\omega}) = \frac{\sqrt{(0,2 - 0,4 \cos \hat{\omega} + 0,8 \cos 2\hat{\omega})^2 + (0,4 \sin \hat{\omega} - 0,8 \sin 2\hat{\omega})^2}}{\sqrt{(1 + 0,1(\cos \hat{\omega} + \cos 2\hat{\omega}))^2 + 0,01(\sin \hat{\omega} + \sin 2\hat{\omega})^2}}, \quad (11.26)$$

и ФЧХ фильтра:

$$\begin{aligned} \varphi_2(\hat{\omega}) &= \arctg \frac{0,4(\sin \hat{\omega} - 2 \sin 2\hat{\omega})}{0,4(0,5 - \cos \hat{\omega} + 2 \cos 2\hat{\omega})} + \arctg \frac{0,1(\sin \hat{\omega} + \sin 2\hat{\omega})}{1 + 0,1(\cos \hat{\omega} + \cos 2\hat{\omega})} = \\ &= \arctg \frac{\sin \hat{\omega} - 2 \sin 2\hat{\omega}}{0,5 - \cos \hat{\omega} + 2 \cos 2\hat{\omega}} + \arctg \frac{\sin \hat{\omega} + \sin 2\hat{\omega}}{10 + \cos \hat{\omega} + \cos 2\hat{\omega}}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Для расчета значений АЧХ и ФЧХ возьмем пять значений частоты:

$$\hat{\omega} = \left\{ 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi \right\}, \text{ результаты расчета которых приведены в табл. 11.2.}$$

Таблица 11.2

Численные значения АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра 2-го порядка

$\hat{\omega}$, рад	$A_2(\hat{\omega})$	$\varphi_2(\hat{\omega})$, рад
0	0,5	0
$\pi/4$	0,48	1,57
$\pi/2$	0,79	-0,46
$3\pi/4$	1,28	-1,12
π	1,4	0

На рис. 11.5 представлены графики АЧХ и ФЧХ рассчитанного фильтра.

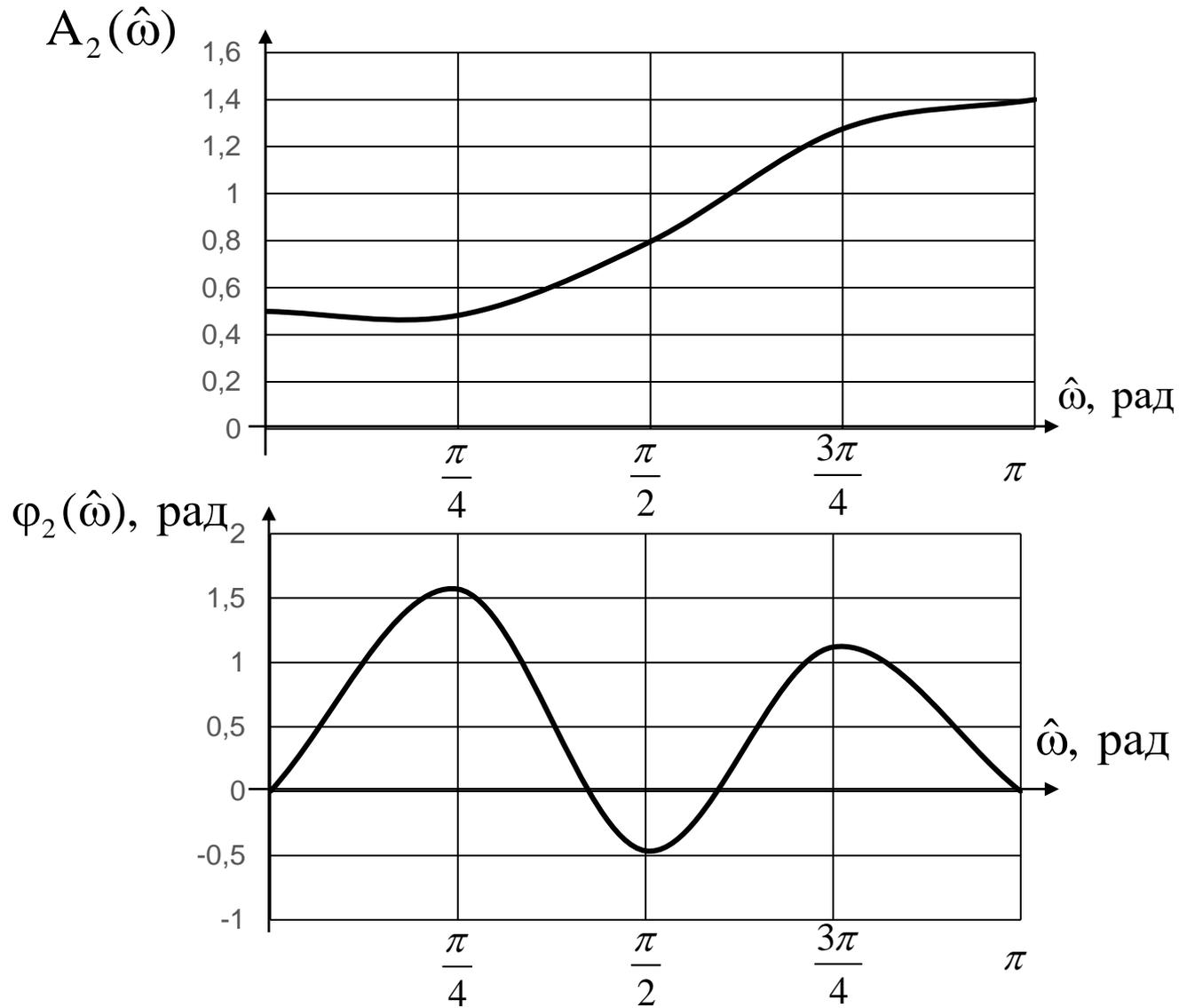


Рис. 11.5. Частотная характеристика БИХ-фильтра 2-го порядка: а – АЧХ, б – ФЧХ

Перечень контрольных вопросов:

1. [Преобразование Фурье импульсной характеристики линейной дискретной системы.](#)
2. [Связь частотной характеристики с передаточной функцией.](#)
3. [Свойства преобразований Фурье дискретных сигналов.](#)
4. [Экспресс-анализ частотной характеристики линейной дискретной системы.](#)



12. Требования к реализации оптимальных цифровых фильтров

Учебные цели.

Изучить: требования к реализации оптимальных цифровых фильтров, условия безыскаженной передачи сигналов в КИХ-фильтрах и характеристики КИХ-фильтров в различных вариантах их реализации.

12.1. Общие принципы построения и классификация цифровых фильтров

Под цифровым фильтром в широком смысле понимают любую цифровую систему (цепь), которая по заданному оператору выполняет преобразование смеси входного цифрового сигнала $x(n)$ и аддитивной помехи $\xi(n)$, возникающей за счет погрешности цифровой обработки (**рис. 12.1**):

$$y(n) = F\{\tilde{x}(n)\}. \quad (12.1)$$

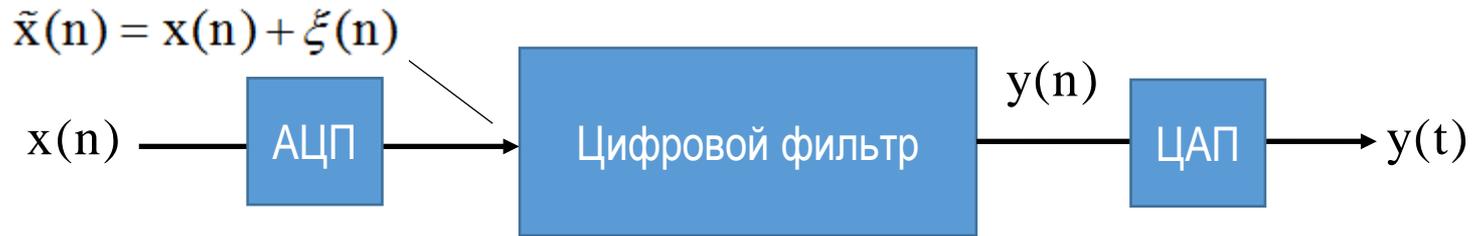


Рис. 12.1. К пояснению цифрового фильтра

К таким фильтрам в широком смысле относятся, например, согласованные с сигналом фильтры, адаптивные фильтры, амплитудные корректоры, дифференциаторы, интеграторы, фазовые и частотные корректоры, в том числе частотные фильтры, и другие устройства.

К цифровым фильтрам в узком смысле относятся только частотно-избирательные фильтры (ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ). В дальнейшем для них проводится анализ цифровых фильтров.

Цифровые фильтры разделяются на два типа: нерекурсивные фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) и рекурсивные фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры).

Цифровые фильтры могут быть реализованы аппаратно, программно и аппаратно-программно.

Аппаратная реализация использует набор регистров, сумматоров, умножителей, логических элементов и др. устройств, объединенных в единое устройство.

Программная реализация представлена в виде программы написанной на языке программирования: для компьютера – на языке высокого уровня, например, C++, а для микропроцессора – на языке ассемблера.

Аппаратно-программная реализация состоит частично из аппаратных средств и частично из программных, например, на входе и выходе используется аппаратные АЦП и ЦАП, а сам процесс фильтрации реализован на ЭВМ программно.

Варианты реализации цифровых фильтров.

Цифровые фильтры могут быть реализованы во временной и частотной области (рис. 12.2).

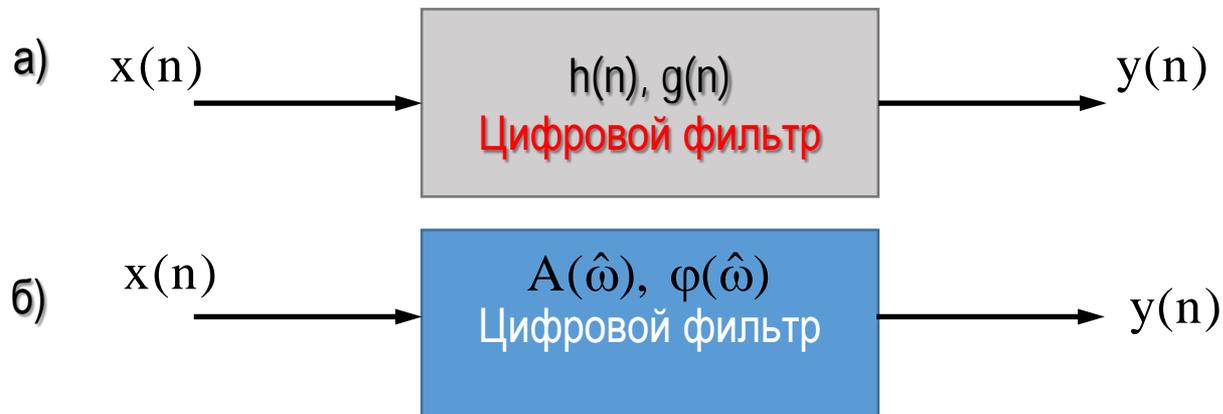


Рис. 12.2. Реализации цифрового фильтра: а – во временной области, б – в частотной области

Во временной области характеристики фильтра задаются импульсной $h(n)$ или переходной $g(n)$ характеристиками.

Импульсная характеристика $h(n)$ – это реакция фильтра на единичный импульс (рис. 12.3).

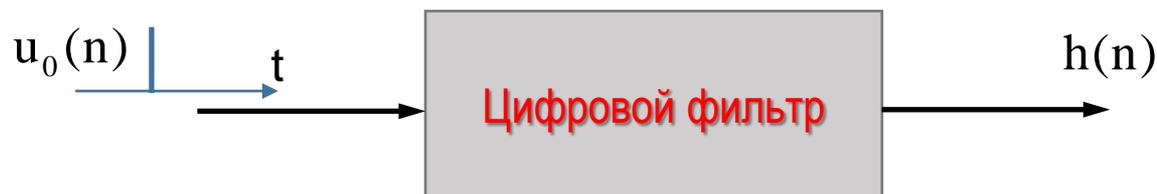


Рис. 12.3. Пояснение об определении импульсной характеристики

Переходная характеристика $g(n)$ – это реакция фильтра на единичный скачок напряжения (рис. 12.4).

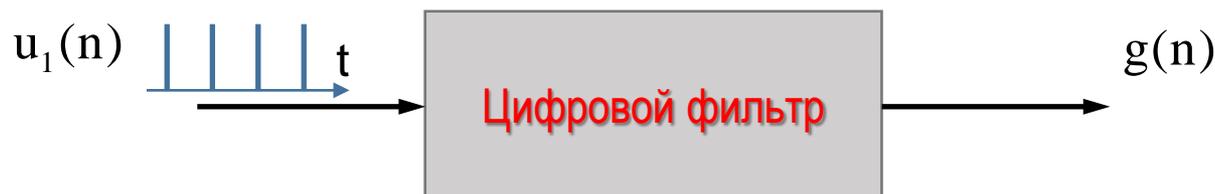


Рис. 12.4. Пояснение об определении переходной характеристики

При использовании временных характеристик фильтра выходной сигнал определяется дискретной сверткой:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(n-k)h(k). \quad (12.2)$$

При использовании частотных характеристик фильтра выходной сигнал вначале определяется в частотной области

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = K(e^{j\hat{\omega}})S(e^{j\hat{\omega}}), \quad (12.3)$$

где $S\{e^{j\hat{\omega}}\}$ – спектр входного сигнала. Затем спектр выходного сигнала переводится в Z-область $z = e^{j\hat{\omega}}$:

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = Y(z), \quad (12.4)$$

из которой путем обратного Z-преобразования можно перейти при необходимости во временную область:

$$y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C Y(z)z^{n-1}dz. \quad (12.5)$$

При обработке в частотной области параметры фильтра обычно задаются АЧХ $A(\hat{\omega})$ и ФЧХ $\varphi(\hat{\omega})$.

Здесь используют нормированные частоты, в рад, заданные диапазоном

$$0 < \hat{\omega} < \pi$$

или для частот, в Гц, до частоты Найквиста: $0 < f < \frac{f_d}{2} = f_H$.

В частности, КИХ-фильтры задаются АЧХ и линейной ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = -C\omega T + \varphi_0, \quad (12.6)$$

где T – период дискретизации; C – константа; $\omega = 2\pi f$; φ_0 – начальный фазовый сдвиг. В этом случае групповое время запаздывания на всех частотах будет постоянным:

$$\tau_{ГВЗ} = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -CT = \text{const}. \quad (12.7)$$

Для частотно-избирательных фильтров предъявляются следующие требования:

- необходимая частота дискретизации f_d , Гц и тип избирательного фильтра: ФНЧ, ФВЧ, ПФ или РФ;

- параметры АЧХ $A(f)$ или характеристика ослабления (затухания) $a(f)$ в дБ для в полос пропускания и задерживания (к переходной полосе требования не предъявляются); $a(f) = 1/A(f)$ или в дБ: $a(f) [\text{дБ}] = -A(f) [\text{дБ}]$;
- параметры ФЧХ в полосе пропускания и задерживания;
- граничные частоты, определяющие полосы пропускания, задерживания и переходную полосу частот в пределах $0 \leq f \leq f_{\text{д}}/2 = f_{\text{Н}}$.

12.2. Меры оптимального синтеза цифровых фильтров

В общем случае в цифровых фильтрах есть полоса пропускания ($0 \leq f \leq f_{\text{х}}$), переходная полоса ($f_{\text{х}} \leq f \leq f_{\text{к}}$) и полоса задерживания ($f_{\text{к}} \leq f \leq f_{\text{д}}/2 = f_{\text{Н}}$) (рис. 12.5). Параметры АЧХ и ФЧХ задаются в полосах пропускания и задерживания, а в переходной полосе они могут иметь произвольные отклонения.

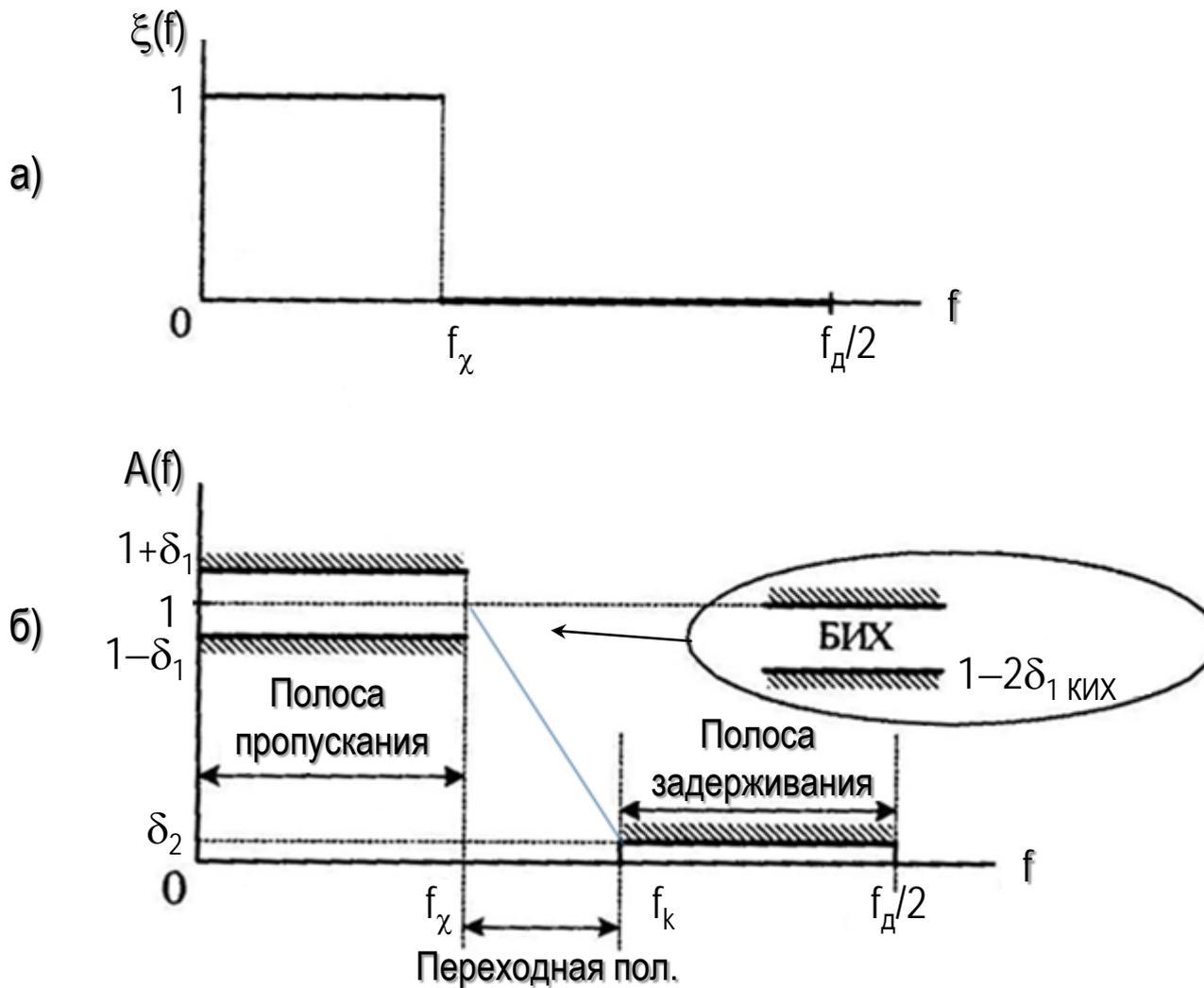
Для КИХ-фильтров в полосе пропускания допускаются отклонения в обе стороны:

$$1 - \delta_1 \leq A(f) \leq 1 + \delta_1,$$

а для БИХ-фильтров допускается отклонение в одну сторону: $1 - 2\delta_1 \leq A(f) \leq 1$. Для полосы задерживания КИХ и БИХ фильтров допускается отклонение АЧХ:

$$0 \leq A(f) \leq \delta_2, \quad f_{\text{к}} \leq f \leq f_{\text{Н}} = f_{\text{д}}/2.$$

Здесь δ_1 – максимально допустимое отклонение от «1» в полосе пропускания; δ_2 – максимально допустимое отклонение от «0» в полосе задерживания.



а – идеальная АЧХ ФНЧ, б – реальная АЧХ и требования к ней

При анализе АЧХ в относительных уровнях (дБ), нормы отклонений определяются (рис. 12.6, а):

- в полосе пропускания для КИХ-фильтров:

$$-a_{\max} \leq A(f) \leq a_{\max}, \text{ где } a_{\max} = -20 \lg(1 - \delta_1) > 0, \quad (12.8)$$

- а для БИХ-фильтров: $-2a_{\max} \leq A(f) \leq 0$;

- в полосе задерживания для КИХ- и БИХ-фильтров:

$$A(f) \leq a_0, \text{ где } a_0 = 20 \lg(\delta_2) < 0. \quad (12.9)$$

При анализе АЧХ в относительных уровнях затухания (дБ), нормы отклонений определяются (рис. 12.6, б):

- в полосе пропускания для КИХ-фильтров:

$$-a_{\max} \leq a(f), \text{ дБ} \leq a_{\max}, \text{ где } a_{\max} = -20 \lg(1 - \delta_1) > 0, \quad (12.10)$$

- а для БИХ-фильтров: $0 \leq a(f) \leq 2a_{\max}$;

- в полосе задерживания для КИХ- и БИХ-фильтров:

$$a(f) \geq a_0, \text{ где } a_0 = -20 \lg(\delta_2) > 0. \quad (12.11)$$

Условия безыскаженного прохождения сигналов через фильтры достигаются линейностью их ФЧХ.

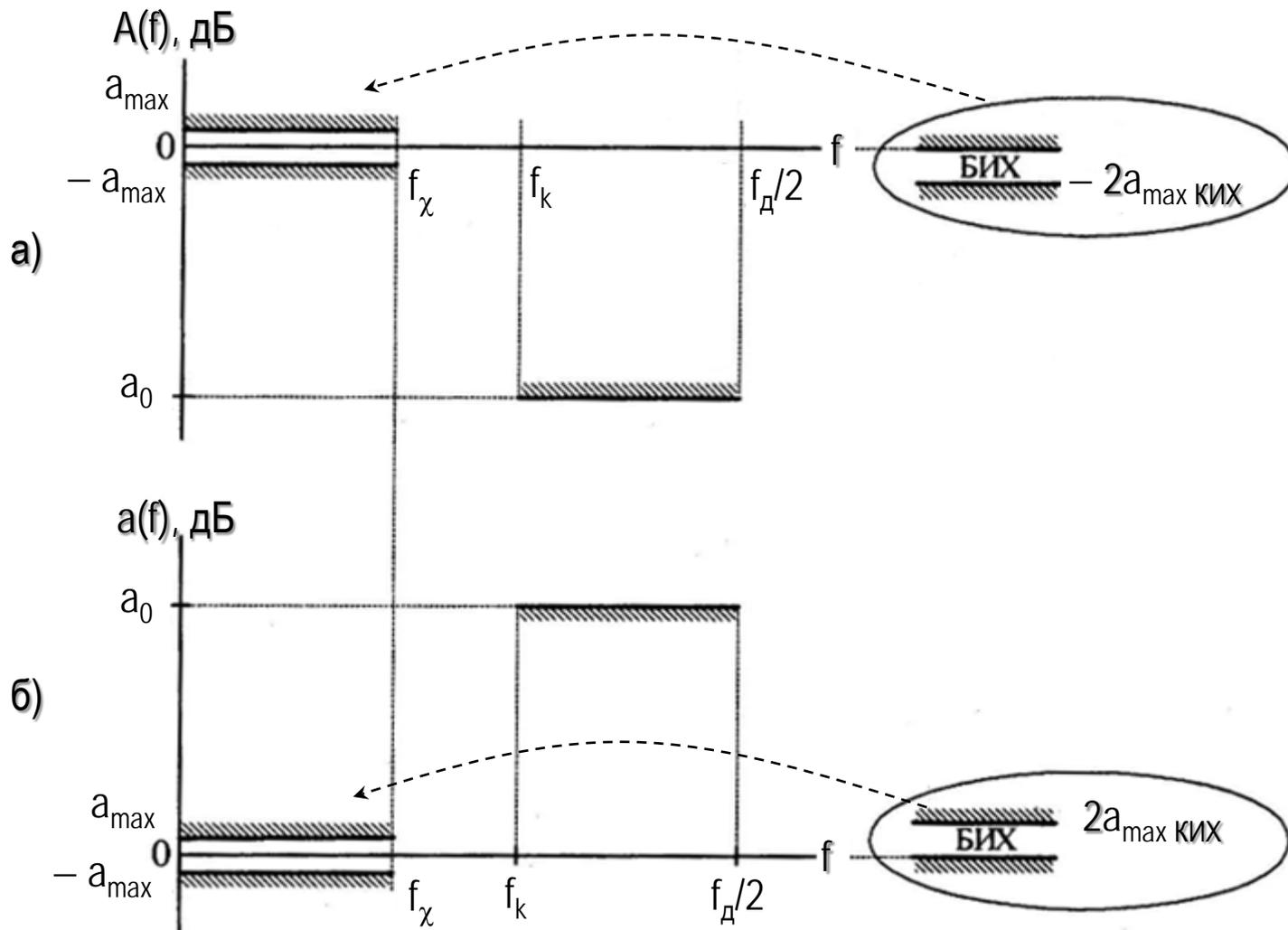


Рис. 12.6. Пояснение к требованиям цифровых фильтров на примере ФНЧ:
 а – коэффициент передачи в дБ, б – характеристика затухания в дБ

Для оптимизации синтеза фильтров с заданной АЧХ используют две меры близости (рис. 12.7):

- чебышевская мера близости (минимизируется максимальное отклонение)

$$\rho_{\text{чеб}} = \max_{f_i \in F} \left\{ p(f_i) \left| \xi(f_i) - B(\vec{b}, f_i) \right| \right\} = \min \{ \vec{b} \}; \quad (12.12)$$

- среднеквадратическая мера близости (минимизируется средний квадрат отклонения)

$$\rho_{\text{кв}} = \sqrt{\sum_{i=1}^L p(f_i) \left| \xi(f_i) - B(\vec{b}, f_i) \right|^2} = \min \{ \vec{b} \}. \quad (12.13)$$

В этих выражениях $p(f_i) > 0$ – весовая функция;

$\xi(f_i)$ – аппроксимируемая функция;

$B(\vec{b}, f_i)$ – аппроксимирующая функция;

$\vec{b} = \{b_0, b_1, \dots, b_k, \dots, b_K\}$ – вектор коэффициентов аппроксимирующей функции.

Аппроксимация производится путем подбора коэффициентов b_k , до достижения минимума меры близости.

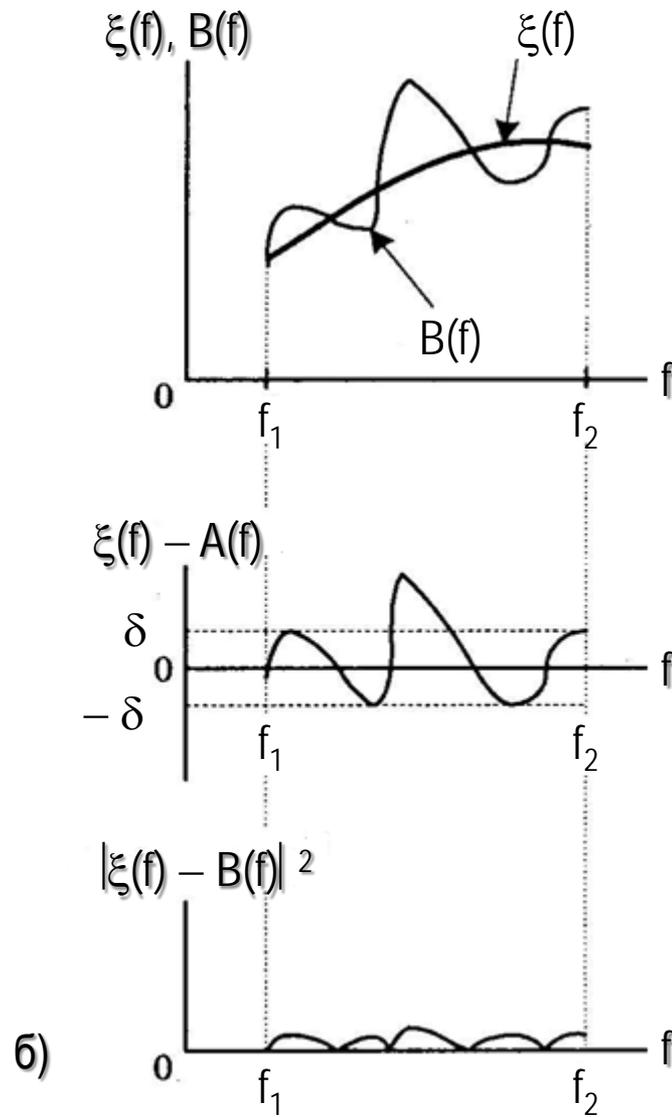
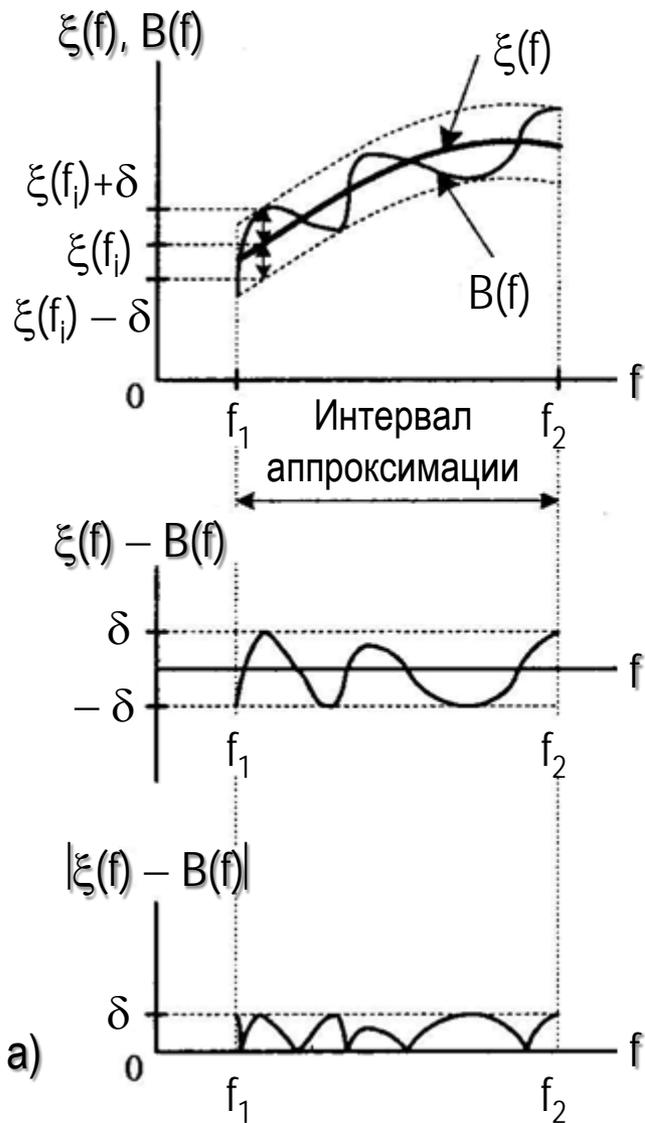


Рис. 12.7. Меры близости: а – чебышевская мера; б – среднеквадратическая мера

12.3. Условия безыскаженной передачи сигналов в КИХ-фильтрах

Главным условием безыскаженного прохождения сигналов через линейные фильтры является сохранение формы входного сигнала на выходе фильтра. Для этого необходимо выполнение двух условий во временной области:

1. Значение реакции фильтра должно быть пропорциональным входному сигналу:

$$y(nT) = ks(nT), \quad (12.14)$$

где k – вещественная константа; T – период дискретизации сигнала.

2. Групповое время задержки сигнала должно быть постоянным:

$$\tau_{ГВЗ} = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = n_0 T = \text{const.} \quad (12.15)$$

На основании этих условий реакция цифрового фильтра должна определяться выражением

$$y(nT) = ks[(n - n_0)T]. \quad (12.16)$$

Определим выполнение условий безыскаженности передачи сигналов в частотной области, для чего воспользуемся свойством задержки и Z-преобразованием (12.16):

$$Y(z) = kz^{-n_0} X(z). \quad (12.17)$$

Перейдем в частотную область с нормированной частотой $z = e^{j\hat{\omega}}$:

$$Y\{e^{j\hat{\omega}}\} = ke^{-j\hat{\omega}n_0} X\{e^{j\hat{\omega}}\}, \quad (12.18)$$

где $X\{e^{j\hat{\omega}}\}$ – спектр входного сигнала.

Откуда ЧХ фильтра будет определяться:

$$K\{e^{j\hat{\omega}}\} = \frac{Y\{e^{j\hat{\omega}}\}}{X\{e^{j\hat{\omega}}\}} = ke^{-j\hat{\omega}n_0}. \quad (12.19)$$

Из (12.19) следует, что АЧХ: $A(\hat{\omega}) = k = \text{const}$, (12.20)

а ФЧХ – линейная функция от частоты: $\varphi(\hat{\omega}) = -\hat{\omega}n_0$. (12.21)

Откуда групповое время запаздывания:

$$\tau_{\text{ГВЗ}} = \frac{d\varphi(\hat{\omega})}{d\hat{\omega}} = -n_0 = \text{const}. \quad (12.22)$$

Рассмотрим пример линейного КИХ-фильтра 2-го порядка с передаточной функцией

$$H(z) = 0,5 + z^{-1} + 0,5z^{-2}.$$

Определим его ЧХ, заменив $z = e^{j\hat{\omega}}$:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = 0,5 + e^{-j\hat{\omega}} + 0,5e^{-j2\hat{\omega}}.$$

Откуда действительная часть ЧХ:

$$\operatorname{Re}\{H(j\hat{\omega})\} = 0,5[1 + 2\cos(\hat{\omega}) + \cos(2\hat{\omega})]$$

и мнимая часть ЧХ: $\operatorname{Im}\{H(j\hat{\omega})\} = -0,5[2\sin(\hat{\omega}) + \sin(2\hat{\omega})]$.

В результате АЧХ (рис. 12.8) фильтра будет определяться:

$$A(\hat{\omega}) = \sqrt{\operatorname{Re}(\hat{\omega})^2 + \operatorname{Im}(\hat{\omega})^2} = 1 + \cos(\hat{\omega}),$$

а ФЧХ (рис. 12.9):

$$\varphi(\hat{\omega}) = -\operatorname{arctg} \frac{2\sin(\hat{\omega}) + \sin(2\hat{\omega})}{1 + 2\cos(\hat{\omega}) + \cos(2\hat{\omega})} = -\operatorname{arctg} \frac{\sin(\hat{\omega})}{\cos(\hat{\omega})} = -\hat{\omega}.$$

В данном случае

$$\tau_{\text{ГВЗ}} = \frac{d\varphi(\hat{\omega})}{d\hat{\omega}} = -1 = \text{const.}$$

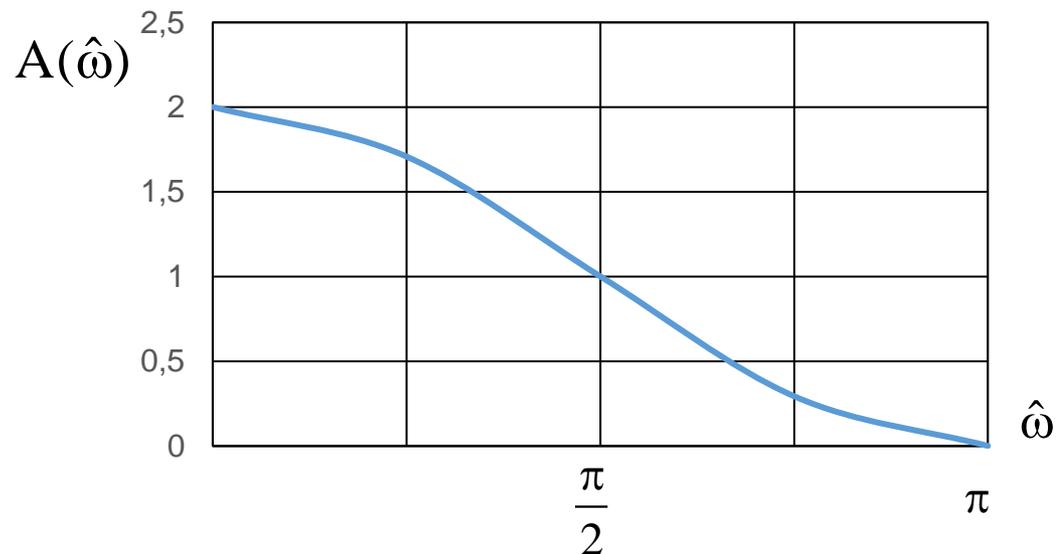


Рис. 12.8. АЧХ КИХ-фильтра 2-го порядка

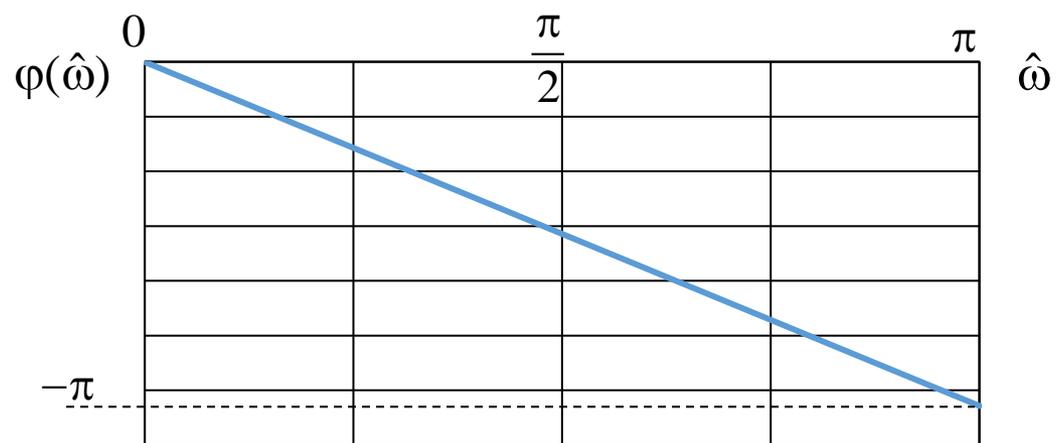


Рис. 12.9. ФЧХ КИХ-фильтра 2-го порядка

12.4. Теорема о линейности ФЧХ КИХ-фильтров

Согласно теореме о линейности КИХ-фильтров, условие линейности обеспечивается, если для переходной функции выполняется условие симметрии:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} = D(z) \pm z^{-R} D(z^{-1}), \quad (12.23)$$

где

$$D(z) = \sum_{i=0}^{N_D-1} d_i z^{-i}; \quad D(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{N_D-1} d_i z^i; \quad (12.24)$$

d_i – вещественные коэффициенты; $D(z)$ – минимально-фазовый многочлен, «нули» которого лежат в пределах единичного круга в z -плоскости ([см. рис. 11.1](#)).

При условии

$$R \geq N_D - 1, \quad (12.25)$$

функция $H(z)$ будет иметь строго линейную ФЧХ вида

$$\varphi(\hat{\omega}) = -\frac{\hat{\omega}R}{2} + (-1)^k \pi + m \frac{\pi}{2}, \quad k=1, 2, \dots, m=\{0, 1\}. \quad (12.26)$$

во всем диапазоне частот $0 \leq \hat{\omega} \leq \pi$ ($0 \leq \omega \leq \omega_d/2$), с точностью до скачков фазы на π радиан, на тех частотах $\hat{\omega}_k$, где АЧХ принимает нулевое значение $A(\hat{\omega}_k) = 0$ (k – порядковый номер нулевых значений АЧХ).

Следствие 1:

Соотношение $H(z)$ (12.23) порождает две ФЧХ:

$$1. \varphi_+(\hat{\omega}) = -\frac{\hat{\omega}R}{2} + (-1)^k \pi; \quad 2. \varphi_-(\hat{\omega}) = -\frac{\hat{\omega}R}{2} + (-1)^k \pi + \frac{\pi}{2}. \quad (12.27)$$

Первый тип ФЧХ (рис. 12.10, а), исходящих из начала координат, соответствует знаку (+) в переходной функции $H(z)$, а второй тип ФЧХ (рис. 12.10, б), исходящих из точки $-\pi/2$, – знаку (-) $H(z)$.

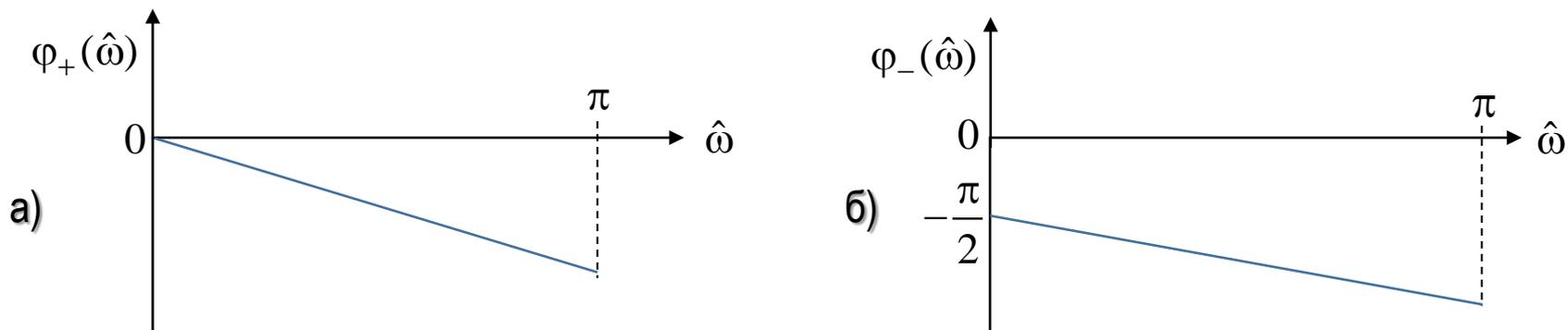


Рис. 12.10. ФЧХ КИХ-фильтров: а – 1 тип; б – 2 тип

Следствие 2:

Скачки ФЧХ на π радиан возможны только в **полосах задерживания** и в переходной полосе, где АЧХ может принимать нулевые значения.

На **рис. 12.11** показан пример ФЧХ ФНЧ, где на частотах $\hat{\omega}_k$ АЧХ принимает нулевое значение $A(\hat{\omega}_k) = 0$.

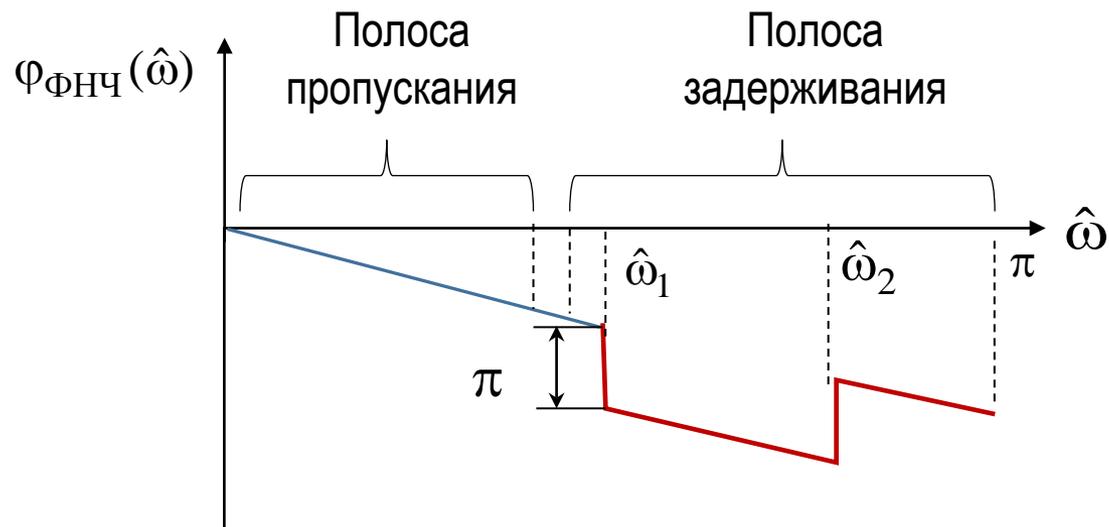


Рис. 12.11. Вариант линейной ФЧХ КИХ-ФНЧ

Следствие 3:

Групповое время запаздывания (задержки) фильтра с линейной ФЧХ постоянно и равно

$$\tau_{ГВЗ}(\hat{\omega}) = -\frac{d\varphi(\hat{\omega})}{d\hat{\omega}} = \frac{N-1}{2} = \text{const.} \quad (12.28)$$

В зависимости от значений N (четное или нечетное) выделяются две группы фильтров: одна из них обладает задержкой на целое число периодов дискретизации T , если N **нечетно**, другая – на целое число периодов дискретизации T плюс полпериода, если N **четно**.

Следствие 4:

Цифровой КИХ-фильтр обладает линейной ФЧХ, если коэффициенты его передаточной функции **симметричны**

$$b_k = b_{N-1-k} \quad (12.29)$$

или **антисимметричны**
$$b_k = -b_{N-1-k}. \quad (12.30)$$

Пример симметричных и антисимметричных переходных функций с линейными ФЧХ:

$$H_{\text{сим}}(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_1 z^{-3} + b_0 z^{-4}; \quad (12.31)$$

$$H_{\text{антисим}}(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} - b_2 z^{-5} - b_1 z^{-6} - b_0 z^{-7}. \quad (12.32)$$

Следствие 5:

Значение R определяет порядок фильтра с линейной ФЧХ. В зависимости от четности или нечетности порядка фильтра R и от симметричности и антисимметричности коэффициентов передаточной функции различают четыре типа КИХ-фильтров с линейной ФЧХ (табл. 12.1).

Таблица 12.1

Типы КИХ-фильтров с линейной ФЧХ

Длина импульсной характеристики (число коэффициентов) N	Порядок фильтра $R=N-1$	Импульсная характеристика	
		Симметричная	Антисимметричная
Нечетная	Четный	Тип 1 , $m=0$	Тип 3 , $m=1$
Четная	Нечетный	Тип 2 , $m=0$	Тип 4 , $m=1$

В табл. 12.2 приведены основные параметры и характеристики КИХ-фильтров с линейными ФЧХ и область их возможного определения, ограниченная свойствами АЧХ и ФЧХ.

В общем случае КИХ-фильтры применяются для частотной фильтрации: ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ. Также КИХ-фильтры могут использоваться как цифровой преобразователь Гильберта (ЦПГ), цифровой дифференциатор (ЦД), цифровой амплитудный корректор (ЦАК) и в других устройствах.

Характеристики КИХ-фильтров

ИХ	Тип	Длина N	Порядок R	Амплитудная функция фильтра	ФЧХ	Применение
Симметричная	1	Нечетная	Четный	$\sum_{k=0}^{R/2} a_k \cos \left[\left(\frac{R}{2} - k \right) \hat{\omega} \right],$ $a_k = 2b_k \left(k \neq \frac{R}{2} \right),$ $a_{R/2} = b_{R/2}$	$-\frac{R}{2} \hat{\omega}$	Без ограничений, кроме ЦПГ и ЦД
	2	Четная	Нечетный	$\sum_{k=0}^{(R-1)/2} a_k \cos \left[\left(\frac{R}{2} - k \right) \hat{\omega} \right],$ $a_k = 2b_k$	$-\left(\frac{R-1}{2} + \frac{1}{2} \right) \hat{\omega}$	ФНЧ, ПФ

ИХ	Тип	Длина N	Порядок R	Амплитудная функция фильтра	ФЧХ	Применение
Антисимметричная	3	Нечетная	Четный	$\sum_{k=0}^{\frac{R}{2}-1} a_k \cos \left[\left(\frac{R}{2} - k \right) \hat{\omega} \right],$ $a_k = 2b_k$	$\frac{\pi}{2} - \frac{R}{2} \hat{\omega}$	ЦПГ и ЦД
	4	Четная	Нечетный	$\sum_{k=0}^{\frac{(R-1)}{2}} a_k \cos \left[\left(\frac{R}{2} - k \right) \hat{\omega} \right],$ $a_k = 2b_k$	$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R-1}{2} + \frac{1}{2} \right) \hat{\omega}$	ЦПГ и ЦД

Перечень контрольных вопросов:

1. [Принципы построения и классификация цифровых фильтров.](#)
2. [Меры оптимального синтеза цифровых фильтров.](#)
3. [Условия безыскаженной передачи сигналов в КИХ-фильтрах.](#)
4. [Теорема и свойства линейности ФЧХ КИХ-фильтров.](#)



13. Синтез оптимальных КИХ-фильтров методом окон

Учебные цели.

Изучить: способы синтеза цифровых КИХ-фильтров методом окон Дирихле, Бартлетта, Хеннинга, Хэмминга, Блэкмана-Хэрриса и Кайзера; характеристики весовых функций различных окон; методику синтеза оптимальных КИХ-фильтров методом окон.

13.1. Синтез КИХ-фильтров методом окон. Искажения при фильтрации

Синтез КИХ-фильтров методом окон основан на формировании фильтра, имеющего характеристики (АЧХ и ФЧХ) близкие к идеальному фильтру при ограниченном числе отсчетов N сигнала.

Идеальная АЧХ имеет прямоугольную форму с точкой разрыва на частоте среза $\hat{\omega}_c$, а ФЧХ должна иметь линейную зависимость.

В качестве примера рассмотрим АЧХ ФНЧ (рис. 13.1):

$$A_{\text{и}}(\hat{\omega}) = H_{\text{и}}(j\hat{\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \hat{\omega} \leq \hat{\omega}_c; \\ 0, & \hat{\omega}_c < \hat{\omega} \leq \pi. \end{cases} \quad (13.1)$$

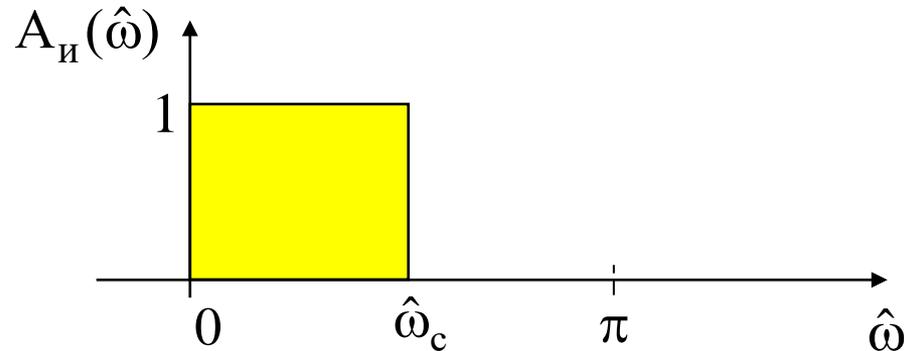


Рис. 13.1. АЧХ идеального ФНЧ

Для перехода к дискретным функциям рассмотрим АЧХ $H_{\text{и}}(j\hat{\omega})$ как периодическую функцию (рис. 13.2), которую можно разложить в дискретный ряд Фурье:

$$H_{\text{и}}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\text{и}}(n)e^{-j\omega Tn}, \quad (13.2)$$

в котором коэффициенты Фурье равны отсчетам идеальной импульсной характеристики:

$$h_{\text{И}}(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} H(j\omega) e^{j\omega Tn} d\omega. \quad (13.3)$$

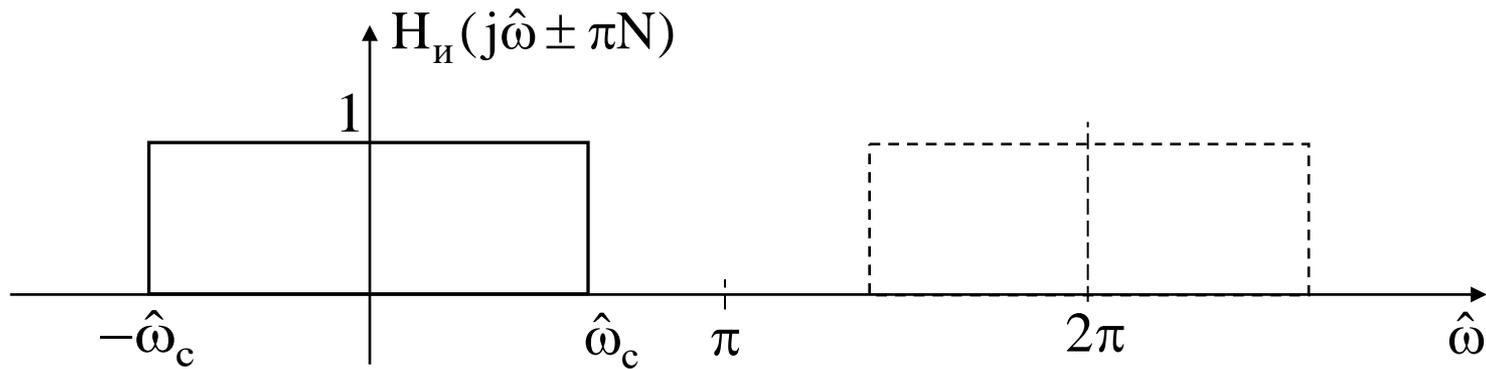


Рис. 13.2. Идеальная периодическая АЧХ ФНЧ

Импульсная характеристика (ИХ) прямоугольной частотной характеристики представляет собой функцию отсчетов (рис. 13.3), заданную на бесконечном интервале времени:

$$h_{\text{И}}(n) = \frac{\sin[\hat{\omega}n]}{\hat{\omega}n}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (13.4)$$

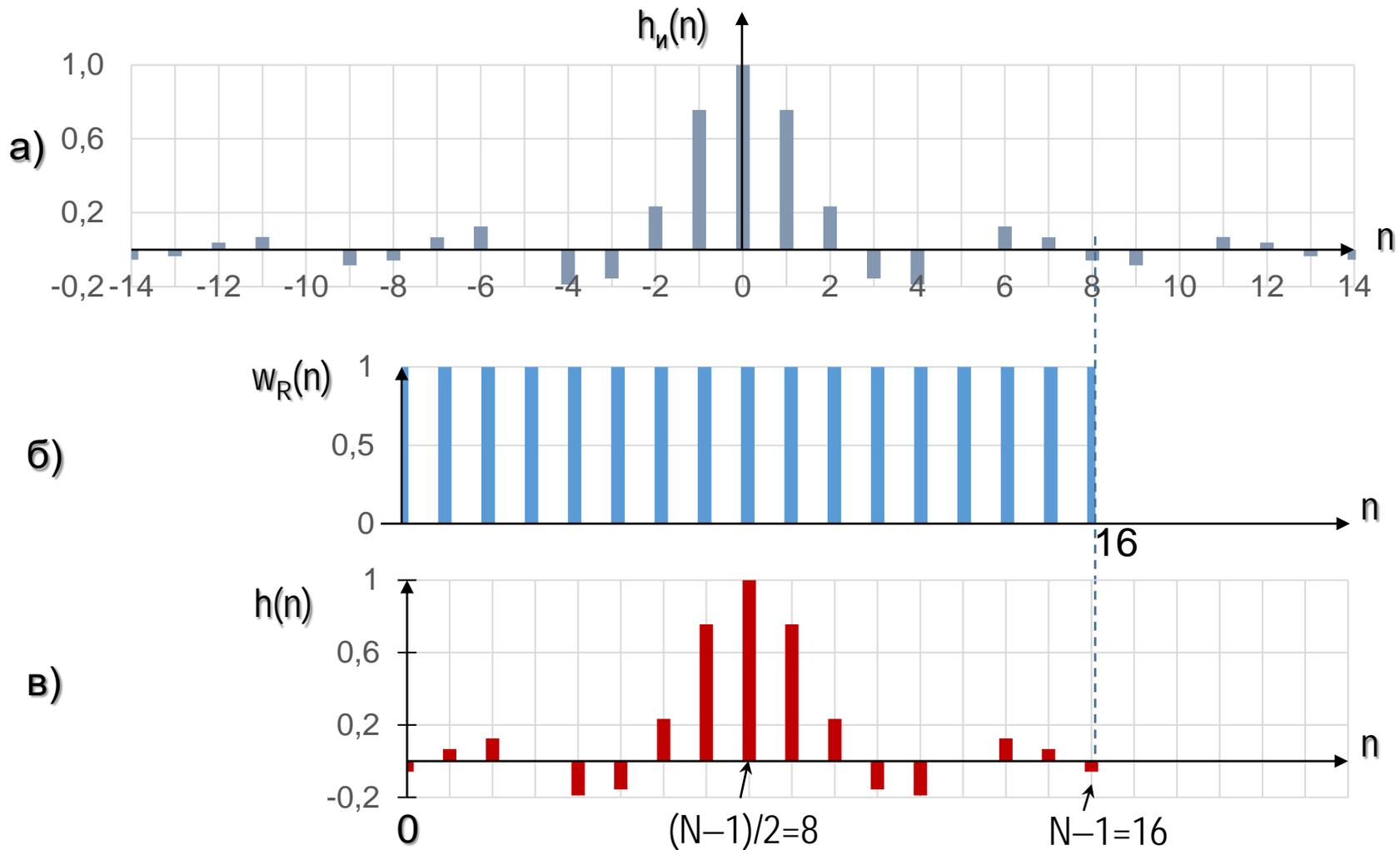


Рис. 13.3. Импульсная характеристика идеального ФНЧ:
 а – отрезок «идеальной» ИХ; б – весовая функция окна; в – реальная ИХ

Из (13.3) и (13.4) следует, что для реализации **«идеального»** фильтра потребуется фильтр с бесконечной ИХ (рис. 13.3, а), что на практике нереализуемо. Поэтому реальная ИХ ограничивается конечным числом отсчетов N (рис. 13.3, в), от числа которых зависит степень приближенности характеристик фильтра к идеальному.

Саму процедуру ограничения можно представить как произведение идеальной ИХ на весовую функцию окна $w_R(n)$, ограничивающего последовательность идеальной ИХ N отсчетами (рис. 13.3, б):

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{при других } n, \end{cases} \quad (13.5)$$

где

$$h(n) = h_{\text{и}}(n)w_R(n). \quad (13.6)$$

В результате частотная характеристика реального фильтра будет определяться:

$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega Tn}. \quad (13.7)$$

На основе (13.7) путем замены $e^{j\hat{\omega}} = z$ получим соответствующую передаточную функцию реального фильтра:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}. \quad (13.8)$$

Для реализации фильтров с **линейной ФЧХ** нулевое значение реальной ИХ смещается влево на $(N-1)/2$ отсчета для ее симметрии (см. рис. 13.3, в).

В силу ограниченности числа отсчетов ИХ АЧХ фильтра отклоняется от идеальной. У реального фильтра между полосой пропускания ($0 \leq \hat{\omega} \leq \hat{\omega}_\chi$) и задерживания ($\hat{\omega}_\kappa \leq \hat{\omega} \leq \pi$) появляется **переходная полоса** ($\hat{\omega}_\chi \leq \hat{\omega} \leq \hat{\omega}_\kappa$), в центре которой находится частота среза $\hat{\omega}_c$, а также возникают **флуктуации** в полосах пропускания и задерживания. **Эти искажения** вызваны **явлением Гиббса**, величина которых определяется прежде всего числом отсчетов N , а также формой весовой функции окна $w_R(n)$. Для примера на рис. 13.4 показана амплитудная функция частоты $B(\hat{\omega})$ реального ФНЧ.

На практике используются разные варианты весовых функций окон, гладкость которых на границах окна определяет величину переходной полосы и амплитуд флуктуаций в полосах пропускания и задерживания.

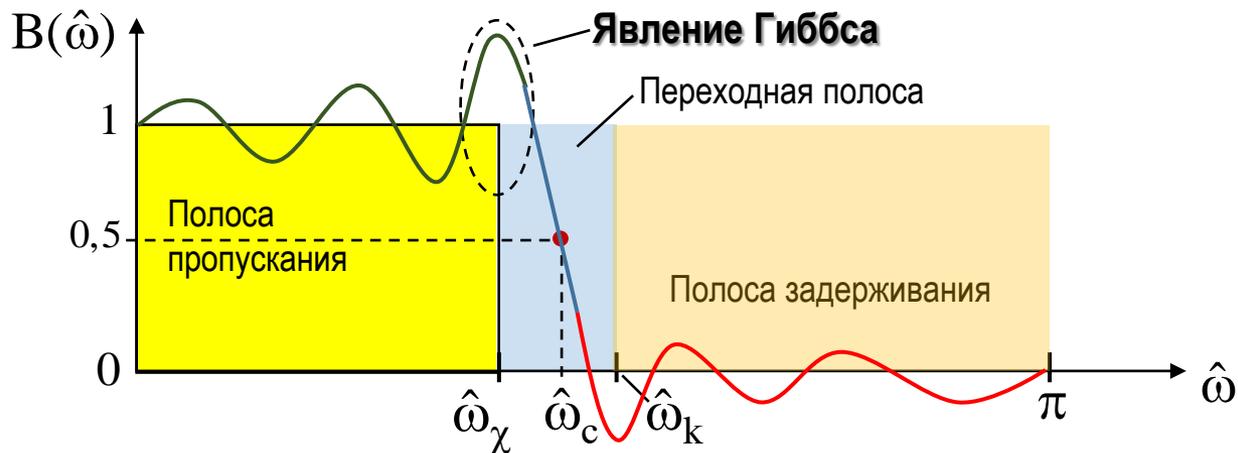


Рис. 13.4. Амплитудная функция частоты реального ФНЧ

Рассмотрим четыре типа окон:

- прямоугольное окно (Дирихле);
- треугольное окно (Бартлетта);
- обобщенное косинусное окно (Хеннинга, Хэмминга и Блэкмана-Хэрриса);
- окно Кайзера.

Прямоугольное окно (Дирихле) определяется ранее рассмотренной весовой функцией (13.6), и с учетом (13.5) переходную функцию фильтра можно выразить

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)w(n)z^{-n}, \quad (13.9)$$

где N – длина весовой функции.

Частотная характеристика весовой функции определяет флуктуации АЧХ фильтров:

$$W_R(j\hat{\omega}) = e^{-\frac{j(N-1)\hat{\omega}}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\hat{\omega}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)}. \quad (13.10)$$

Максимум этой функции на частоте $\hat{\omega} = 0$ равен $W_R(0) = N$.

Функция (13.10) известна под названием **ядра Дирихле**. Первый множитель указывает фазовый сдвиг спектра весовой функции окна или сдвиг $w_R(n)$ влево на $(N - 1)/2$ отсчетов ([см. рис. 13.3](#)).

Для анализа рассмотрим нормированную функцию (13.10) без учета коэффициента N ([рис. 13.5](#)):

$$\tilde{W}_R(j\hat{\omega}) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{N\hat{\omega}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)}. \quad (13.11)$$

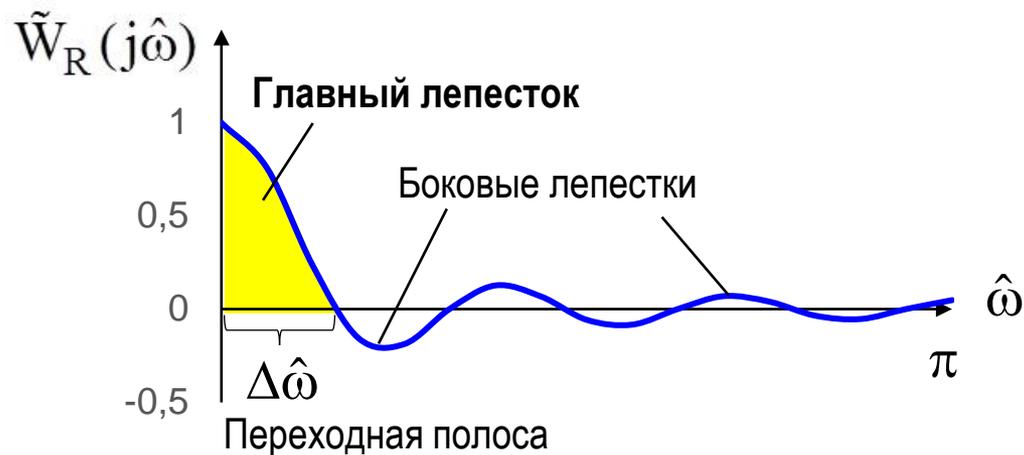


Рис. 13.5. График нормированного сомножителя ядра Дирихле

Нули функции (13.10) будут на частотах: $\hat{\omega} = k \frac{2\pi}{N}$, $k = 1, 2, 3, \dots, N$, что соответствует

$$\sin\left(\frac{\hat{\omega}N}{2}\right) = 0. \quad (13.12)$$

Ширина всех лепестков функции (13.11) одинакова и равна

$$\Delta\hat{\omega} = \frac{2\pi}{N}, \quad (13.13)$$

а, в частности, **главный лепесток** определяет **переходную полосу** фильтра.

С учетом связи реальной импульсной характеристики с идеальной ([13.6](#)), результирующая частотная функция фильтра будет определяться сверткой спектров идеальной ИХ и весовой функции окна:

$$H(j\hat{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{\text{И}}(j\varphi) W_{\text{R}}(\hat{\omega} - \varphi) d\varphi. \quad (13.14)$$

Но так как

$$H_{\text{И}}(j\hat{\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \hat{\omega} \leq \hat{\omega}_c; \\ 0, & \hat{\omega}_c < \hat{\omega} \leq \pi, \end{cases} \quad (13.15)$$

спектр ([13.14](#)) будет определяться

$$H(j\hat{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\hat{\omega}_c}^{\hat{\omega}_c} W_{\text{R}}(\hat{\omega} - \varphi) d\varphi. \quad (13.16)$$

На [рис. 13.4](#) показана типовая амплитудная функция частоты реального ФНЧ, где процесс флуктуаций описывается функцией Дирихле ([13.10](#)) зеркально относительно частоты среза.

Треугольное окно (Бартлетта) описывается весовой функцией (рис. 13.6):

$$w_T(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}; \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases} \quad (13.17)$$

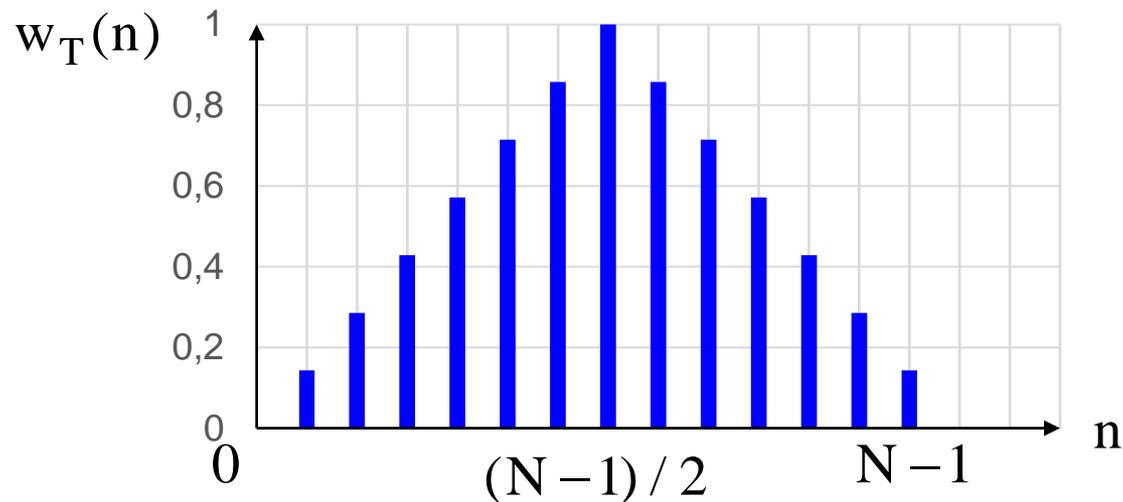


Рис. 13.6. Пример весовой функции с треугольным окном

Частотная характеристика такой функции определяется (рис. 13.7):

$$W_T(j\hat{\omega}) = \frac{2}{N} e^{-j\left(\frac{N}{2}-1\right)\hat{\omega}} \left[\frac{\sin\left(\frac{N\hat{\omega}}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)} \right]^2. \quad (13.18)$$

Исходя из (13.18), нули спектра определяются на частотах, где $\sin(N\hat{\omega}/4) = 0$:

$$\hat{\omega} = k \frac{4\pi}{N}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (13.19)$$

а ширина лепестков в два раза шире, чем для окна Дирихле: $\Delta\hat{\omega} = \frac{4\pi}{N}$. (13.20)

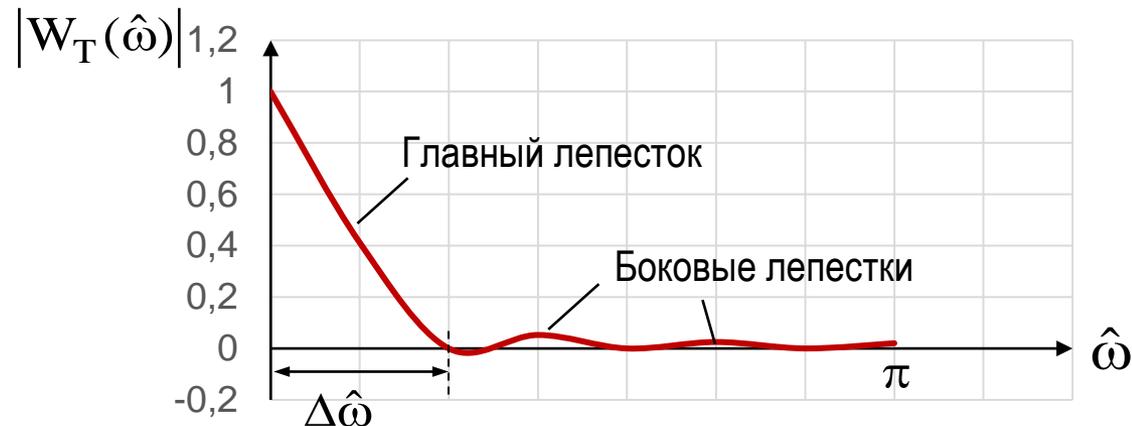


Рис. 13.7. АЧХ весовой функции с треугольным окном

Обобщенное косинусное окно описывается весовой функцией:

$$w_H(n) = \begin{cases} a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + a_2 \cos \frac{4\pi n}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases} \quad (13.21)$$

В зависимости от коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 используется семейство косинусных окон, отвечающих условию:

$$a_0 + |a_1| + a_2 = 1. \quad (13.22)$$

Значения коэффициентов и наименований для разных окон этого семейства приведены в **табл. 13.1**.

Таблица 13.1

Параметры косинусных окон

Окна	Параметры		
	a_0	a_1	a_2
Хэннинга	0,5	-0,5	0
Хэмминга	0,54	-0,46	0
Блэкмана-Хэрриса	0,42	-0,5	0,08

В качестве примера на **рис. 13.8** показана весовая функция окна **Блэкмана-Хэрриса**.

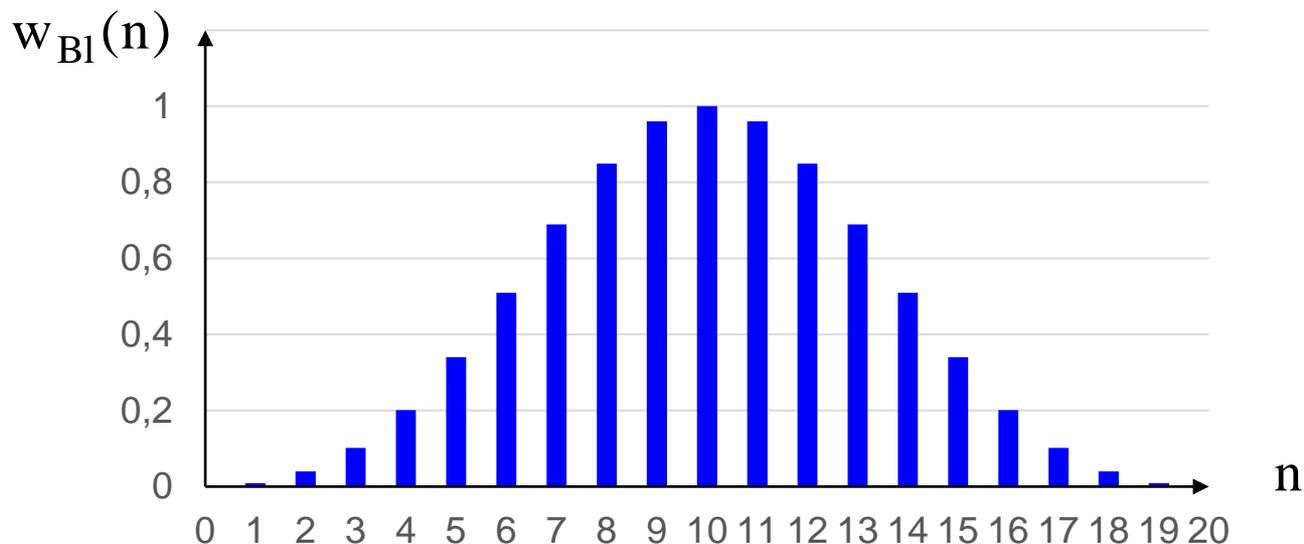


Рис. 13.8. Пример весовой функции с окном Блэкмана-Хэрриса

Частотная характеристика такой функции более резко затухает и имеет нули на частотах:

$$\hat{\omega} = k \frac{6\pi}{N}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (13.23)$$

а ширина лепестков здесь шире в три раза по сравнению с окном Дирихле и определяется:

$$\Delta\hat{\omega} = \frac{6\pi}{N}. \quad (13.24)$$

Качество характеристик перечисленных оконных фильтров определяется степенью подавления боковых лепестков в полосе задерживания, который оценивается **коэффициентом пульсаций**:

$$k_{\Pi} = \frac{\text{Амплитуда первого бокового лепестка}}{\text{Амплитуда главного бокового лепестка}} 100\%. \quad (13.25)$$

В **табл. 13.2** приведены сравнительные параметры разных окон.

Таблица 13.2. Параметры окон

Тип окна	Ширина главного лепестка	Максимальный уровень боковых лепестков, дБ	Коэффициент пульсаций k_{Π} , % при $N=11$
Дирихле (прямоугольное)	$2\pi/N$	- 13	22,34
Хэннинга	$4\pi/N$	- 35	2,62
Хэмминга	$4\pi/N$	- 43	1,47
Блэкмана-Хэрриса	$6\pi/N$	- 67	0,08

13.2. Синтез КИХ-фильтров методом окон Кайзера

К более оптимальным относятся КИХ-фильтры, синтезированные на базе **окон Кайзера**. Такие фильтры обладают меньшим коэффициентом пульсации при ограниченной переходной полосе частот. Это достигается за счет более гладкой весовой функции:

$$w_K(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left(\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\alpha)}, & |n| \leq \frac{N-1}{2}; \\ 0, & |n| > \frac{N-1}{2}, \end{cases} \quad (13.26)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x}{2n!} \right]^2; \quad (13.27)$$

N – длина КИХ-фильтра; α – параметр, определяющий величину пульсаций.

Параметры N и α определяют в полосе задерживания по эмпирическим формулам:

$$\alpha = \begin{cases} 0,1102(a_{\min} - 8,7), & a_{\min} > 50; \\ 0,5842(a_{\min} - 21)^{0,4} + 0,07886(a_{\min} - 21), & 21 < a_{\min} < 50; \\ 0, & a_{\min} < 21. \end{cases} \quad (13.28)$$

где $a_{\min, \text{дБ}} = -20 \lg \delta$; δ – допустимое отклонение АЧХ в полосе задерживания.

Параметры окна Кайзера обладают свойством постоянного значения **D-фактора** при фиксированном отклонении АЧХ δ в полосе задерживания:

$$D = (N - 1) \Delta F \Big|_{\delta = \text{fix}} = \text{const}, \quad (13.29)$$

где ΔF – полоса задерживания:

$$\Delta F = \hat{f}_k - \hat{f}_\chi = \frac{\hat{\omega}_k - \hat{\omega}_\chi}{2\pi}. \quad (13.30)$$

Из выражения **(13.29)** можно определить порядок фильтра с окном Кайзера:

$$N = \left[\frac{D}{\Delta F} + 1 \right], \quad (13.31)$$

где

$$D = \begin{cases} \frac{a_{\min} - 7,95}{14,36}, & a_{\min} > 21; \\ 0,9222, & a_{\min} < 21. \end{cases} \quad (13.32)$$

Для сравнительного анализа в **табл. 13.3** приведены параметры окна Кайзера при различных требованиях к затуханию в полосе задерживания.

Таблица. 13.3

Параметры окна Кайзера

Затухание в полосе задерживания a_{\min} , дБ	Параметр α	D-фактор	Затухание в полосе пропускания a_{\min} , дБ
30	2,117	1,536	0,27
50	4,551	2,928	0,0274
70	6,755	4,321	0,00275
90	8,959	5,714	0,000275
100	10,061	6,41	0,000087

Из **табл. 13.3** видно, что данные фильтры обладают большим затуханием в полосе задерживания и достаточно равномерной АЧХ в полосе пропускания.

13.3. Методика синтеза КИХ-фильтров методом окон

Методика синтеза оптимальных КИХ-фильтров строится на нескольких этапах.

Этап 1.

На первом этапе по заданным параметрам фильтра необходимо **выбрать тип окна**, обеспечивающего его реализацию при наименьшей длине ИХ – N_{\min} .

Для прямоугольных, треугольных и косинусных окон длина ИХ определяется только переходной полосой $\Delta f_{\text{п.мах}}$ ([см. табл. 13.2](#)), а для окна Кайзера длина ИХ зависит как от переходной полосы, так и от требований к равномерности АЧХ – $\delta_{\text{мах}}$.

Для первых трех окон длина ИХ определяется

$$N = \left[\frac{p\pi}{\Delta \hat{f}_{\text{п}}} \right], \quad (13.33)$$

где $[x]$ – оператор выделения целой части аргумента x ; $p=2, 4$ или 6 , в зависимости от типа окна ([см. табл. 13.2](#)).

Для окна Кайзера длина ИХ вычисляется по формуле ([13.31](#)).

Этап 2.

После выбранного типа окна и длины ИХ (N) необходимо синтезировать ИХ фильтра:

$$h(n) = h_{\text{и}}(n)w(n), \quad (13.34)$$

где $h_{\text{и}}(n)$ – ИХ идеального фильтра; $w(n)$ – весовая функция выбранного окна [см. формулы (13.5), (13.17), (13.21), (13.26)]. В табл. 13.4 приведены ИХ идеальных частотных фильтров разных видов.

Таблица 13.4

Формулы для расчета идеальных импульсных характеристик частотных фильтров

Тип фильтра	Импульсная характеристика		Примечание
	$h_{\text{и}}(0)$	$h_{\text{и}}(n)$	
ФНЧ	$2\hat{f}_c$	$\frac{\sin(2\pi\hat{f}_c n)}{\pi n}$	$\hat{f}_c = \frac{f_k + f_{\chi}}{2f_d}$
ФВЧ	$1 - 2\hat{f}_c$	$-\frac{\sin(2\pi\hat{f}_c n)}{\pi n}$	
ПФ	$2(\hat{f}_{c2} - \hat{f}_{c1})$	$\frac{\sin(2\pi\hat{f}_{c2} n) - \sin(2\pi\hat{f}_{c1} n)}{\pi n}$	$\hat{f}_{c1} = \frac{f_{-k} + f_{-\chi}}{2f_d};$
РФ	$1 - 2(\hat{f}_{c1} - \hat{f}_{c2})$	$\frac{\sin(2\pi\hat{f}_{c1} n) - \sin(2\pi\hat{f}_{c2} n)}{\pi n}$	$\hat{f}_{c2} = \frac{f_k + f_{\chi}}{2f_d}$

Этап 3.

После определения ИХ синтезированного фильтра необходимо получить переходную функцию:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}. \quad (13.35)$$

Из формулы **(13.35)** следует, что значения ИХ для каждого отсчета являются коэффициентами переходной функции:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}, \quad (13.36)$$

где $b_n = h(n)$. Здесь для обеспечения линейности ФЧХ КИХ-фильтра при нечетной длине N его ИХ используется симметричная передаточная функция, в которой $b_k = b_{N-1-k}$, а в случае четной длины N – антисимметричная передаточная функция, в которой $b_k = -b_{N-1-k}$.

Далее на основе функции **(13.36)** строится функциональная схема синтезируемого КИХ-фильтра.

В качестве примера рассмотрим типовой КИХ-ФНЧ с четной ИХ, длиной $N=5$, которому соответствует симметричная передаточная функция:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_1 z^{-3} + b_0 z^{-4} = b_0(1 + z^{-4}) + b_1(z^{-1} + z^{-3}) + b_2 z^{-2}. \quad (13.37)$$

Так как функция (13.37) является симметричной, это упрощает схему фильтра (рис. 13.9).

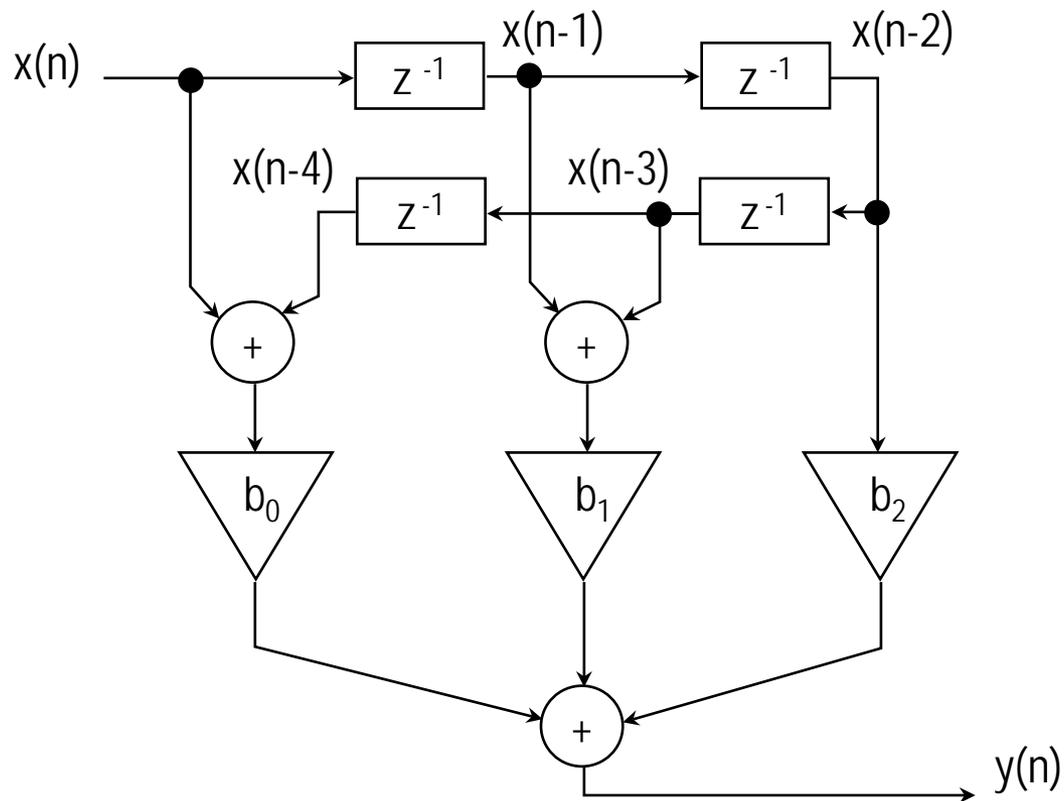


Рис. 13.9. Функциональная схема КИХ-фильтра

Этап 4.

На данном этапе по полученному выражению (13.37) после замены переменной $z = e^{j\hat{\omega}}$ (см. подр. 11.2) рассчитывается АЧХ синтезированного КИХ-ФНЧ (рис. 13.10).

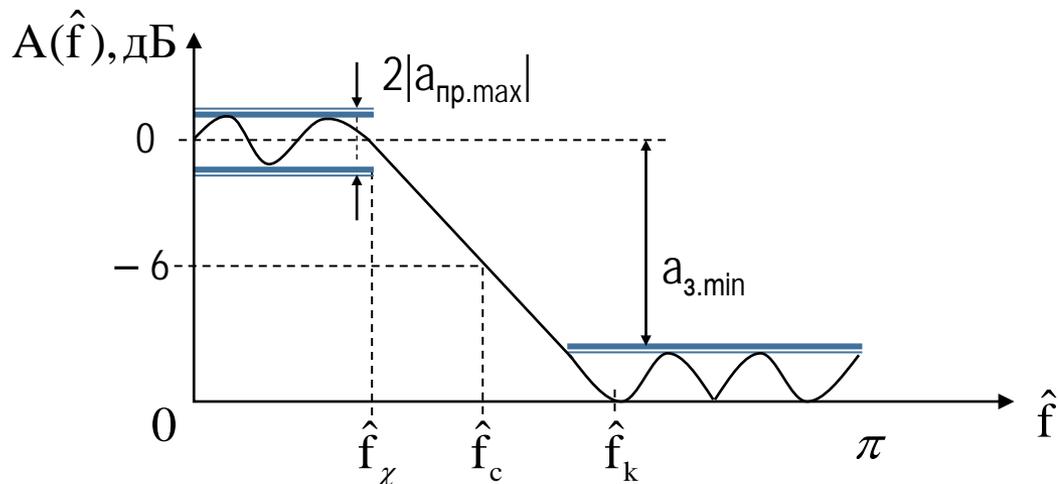


Рис. 13.10. Пример АЧХ КИХ-фильтра

У синтезированного фильтра неравномерность АЧХ не должна превышать заданные значения δ_{\max} , чему соответствуют допустимое затухание в полосе задержания

$$a_{з.min, дБ} = -20 \lg \delta_{\max} \quad (13.38)$$

и максимальное отклонение от нуля дБ в полосе пропускания на величину

$$a_{\text{пр. max, дБ}} = \pm 20 \lg \left(1 + \frac{\delta_{\text{max}}}{2} \right). \quad (13.39)$$

Все граничные частоты на графике АЧХ (см. рис. 13.10) пронумерованы по отношению к частоте дискретизации:

$$\hat{f}_{\chi} = \frac{f_{\chi}}{f_{\text{д}}}; \quad \hat{f}_{\chi} = \frac{f_{\chi}}{f_{\text{д}}}; \quad \hat{f}_{\chi} = \frac{f_{\chi}}{f_{\text{д}}}. \quad (13.40)$$

Для наглядности методики рассмотрим **пример** синтеза КИХ-фильтра с заданными параметрами (табл. 13.5).

Таблица 13.5

Исходные параметры для синтеза КИХ-фильтра

Тип фильтра	Максимальная частота входного сигнала, $f_{\text{вх. max}}$, кГц	Частота среза, f_c , кГц	Переходная полоса, Δf , кГц	Максимальное отклонение в полосе задержания δ_{max}
ФНЧ	50	15	20	0,08

Этап 1.

По максимальной частоте входного сигнала рассчитывается минимальная частота дискретизации:

$$f_{\text{д}} = 2f_{\text{вх max}}, \quad (13.41)$$

на основе которой по формуле (13.40) определяются значения нормированных граничных частот и величина нормированной переходной полосы:

$$\Delta \hat{f}_{\text{п}} = \frac{f_{\text{k}} - f_{\text{ч}}}{f_{\text{д}}} = \frac{\Delta f_{\text{п}}}{f_{\text{д}}}. \quad (13.42)$$

Далее по формулам (13.31) и (13.33) вычисляются необходимые длины ИХ фильтра для разных типов окон. Результаты расчета первого этапа занесены в табл. 13.6.

Таблица 13.6

Результаты расчета первого этапа

$f_{\text{д}}, \text{КГц}$	$f_{\text{ч}}, \text{КГц}$	$\hat{f}_{\text{ч}}$	$f_{\text{k}}, \text{КГц}$	\hat{f}_{k}	$\hat{f}_{\text{с}}$	$\Delta \hat{f}_{\text{п}}$	Прямоугольное	Треугольное	Блэкмана	Кайзера			
							N_{R}	N_{T}	N_{H}	$a_{\text{min}}, \text{дБ}$	α	D	N_{k}
100	5	0,05	25	0,25	0,15	0,2	31	62	94	21,94	0,64	0,974	5

Этап 2.

Из **табл. 13.6** видно, что наименьшая длина ИХ $N=5$ соответствует окну Кайзера, использование которого обеспечит синтез оптимального КИХ-фильтра. Исходя из [табл. 13.4](#), идеальная ИХ ФНЧ определяется:

$$h_{\text{и}}(n) = \begin{cases} 2\hat{f}_c, & \text{при } n = 0; \\ \frac{\sin(2\pi\hat{f}_c n)}{\pi n}, & \text{при } 1 \leq n \leq N-1, \end{cases} \quad (13.43)$$

на основе которой с учетом выражения [\(13.26\)](#) для весовой функции окна Кайзера по формуле [\(13.34\)](#) вычисляется ИХ синтезируемого КИХ-ФНЧ. Результаты расчета второго этапа приведены в **табл. 13.7**.

Таблица 13.7

Результаты расчета второго этапа

n	0	1	2	3	4
$h_{\text{и}}(n)$	0,3	0,25752	0,15137	0,03279	-0,04677
$w_{\text{к}}(n)$	1	0,975531	0,90398	0	0
$h(n)$	0,3	0,25122	0,13683	0	0

Этап 3.

По полученной ИХ определяется переходная функция синтезированного КИХ-фильтра, в котором $b_k = h(R/2 - k)$, где R – порядок фильтра; $R=N-1$. Так как длина ИХ имеет нечетное значение $N=5$, то данному фильтру соответствует симметричная передаточная функция $R=4$ порядка

$$H(z) = 0,14 + 0,25z^{-1} + 0,3z^{-2} + 0,25z^{-3} + 0,14z^{-4}.$$

структурная схема такого фильтра показана на **рис. 13.11**.

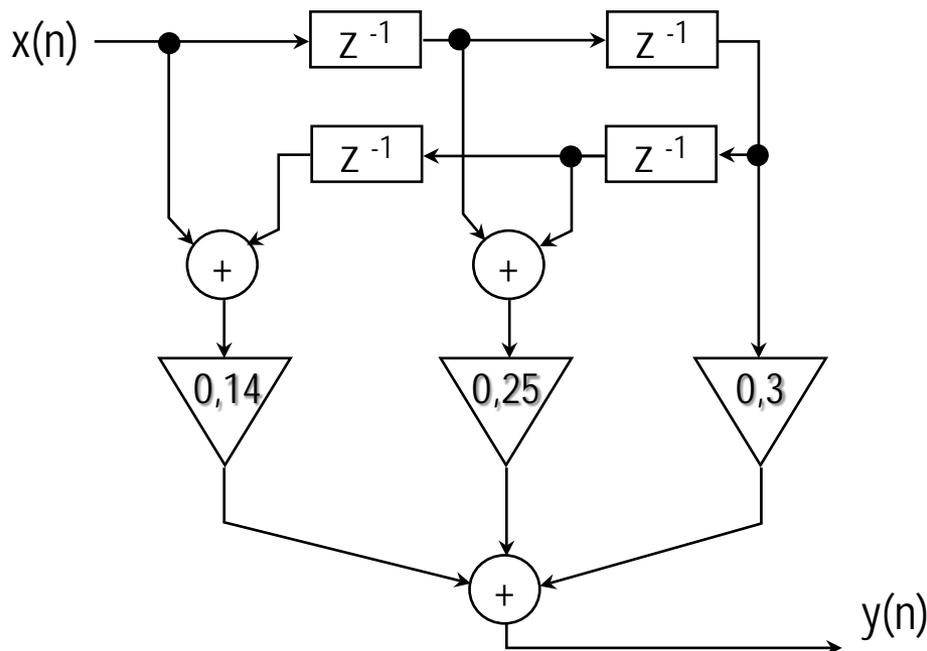


Рис. 13.11. Функциональная схема синтезированного КИХ-фильтра

Этап 4.

На данном этапе по полученному выражению переходной функции определяется ЧХ синтезированного КИХ-фильтра:

$$H(j\hat{\omega}) = 0,14 + 0,25e^{-j\hat{\omega}} + 0,3e^{-j2\hat{\omega}} + 0,25e^{-j3\hat{\omega}} + 0,14e^{-j4\hat{\omega}},$$

которой соответствует АЧХ, показанная на рис. 13.12.

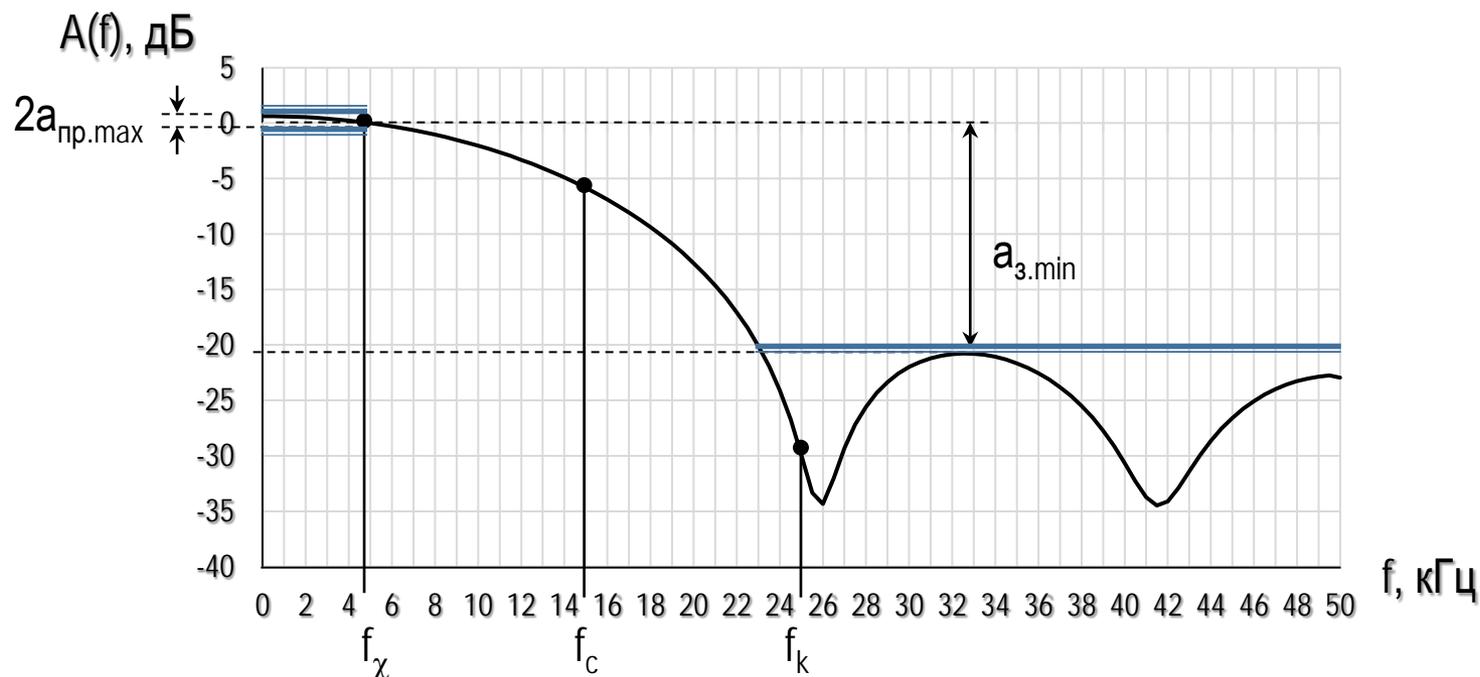


Рис. 13.12. АЧХ синтезированного КИХ-фильтра

Перечень контрольных вопросов:

1. [Сущность синтеза КИХ-фильтров методом окон.](#)
2. [Искажения фильтрации. Явление Гиббса.](#)
3. [Синтез КИХ-фильтров методом окон Дирихле.](#)
4. [Синтез КИХ-фильтров методом окон Бартлетта.](#)
5. [Синтез КИХ-фильтров методом косинусных окон.](#)
6. [Синтез КИХ-фильтров методом окон Кайзера.](#)
7. [Методика синтеза КИХ-фильтров методом окон.](#)

14. Синтез оптимальных КИХ-фильтров Чебышева

Учебные цели.

Изучить: принципы построения полиномов Чебышева, алгоритм синтеза оптимальных цифровых КИХ-фильтров методом Чебышева и методы оценки характеристик реализованных цифровых фильтров.

14.1. Методика синтеза оптимальных КИХ-фильтров Чебышева

Синтез КИХ-фильтров Чебышева отличается от оконных методов возможностью формирования импульсной характеристики (ИХ) фильтра с меньшей длиной N_c при обеспечении требуемых параметров по граничным частотам ω_x , ω_k и допустимым отклонениям в полосах пропускания δ_1 и задерживания δ_2 .

Сущность метода заключается в аппроксимации заданной характеристики КИХ-фильтра по критерию Чебышева с предъявленными требованиями к ее близости.

При рассмотрении избирательных частотных фильтров для аппроксимации предъявляются ограничительные требования к линейности ФЧХ и к соотношению между коэффициентами передаточной функции (симметрии или антисимметрии).

Решение поставленной задачи при минимальном порядке ИХ или передаточной функции (N_{\min}) называется **задачей оптимального синтеза**.

В общем случае с учетом ограничений только в полосе пропускания ставится задача синтеза КИХ-фильтра с частотной характеристикой в виде:

$$H(j\hat{\omega}) = B(\hat{\omega})e^{j\varphi(\hat{\omega})}, \quad (14.1)$$

где $B(\hat{\omega})$ – амплитудная функция частоты (далее амплитудная функция), которая всегда положительна в полосе пропускания и может принимать как положительные, так и отрицательные значения в полосе задерживания.

При заданных условиях АЧХ фильтра будет определяться амплитудной функцией:

$$A(\hat{\omega}) = |H(j\hat{\omega})| = |B(\hat{\omega})| \quad (14.2)$$

или:

$$A(\hat{\omega}) = \begin{cases} B(\hat{\omega}) & \text{в полосе пропускания;} \\ |B(\hat{\omega})| & \text{в полосе задерживания.} \end{cases} \quad (14.3)$$

Согласно требованиям к линейности ФЧХ, например, для фильтра **1-го типа**, частотную функцию можно представить в виде тригонометрического полинома:

$$B_1(\hat{\omega}, \vec{a}) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} 2b_k \cos \left[\hat{\omega} \left(\frac{N-1}{2} - k \right) \right] = \sum_{k=0}^M a_k \cos [\varphi(\hat{\omega})], \quad (14.4)$$

где \vec{a} – вектор коэффициентов $\vec{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_M\}$, связывающих переходную и передаточную функции: $a_k = 2b_k = 2h_k$; $M = (N-1)/2$ – порядок полинома $B(\hat{\omega}, \vec{a})$

Таким образом, если будут известны коэффициенты \vec{a} тригонометрического полинома $B(\hat{\omega}, \vec{a})$ нетрудно записать передаточную функцию в z-области:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i(n) z^{-i}; \quad (14.5)$$

где

$$\begin{cases} b_i = b_{N-1-i} = a_k/2, & i = k \text{ – для фильтров 1 и 2 типа;} \\ b_i = a_k/2, b_{N-1-i} = -b_k, & i = k \text{ – для фильтров 3 и 4 типа;} \end{cases} \quad (14.6)$$

В результате задача оптимального синтеза сводится к определению такого вектора коэффициентов \vec{a} полинома $B(\hat{\omega}, \vec{a})$, при котором достигается минимальный порядок передаточной функции **(14.5)**.

На примере **КИХ**-фильтра 1-го типа для синтеза заданной амплитудной функции предъявляются следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha\delta &\leq B(\hat{\omega}, \bar{a}) \leq 1 + \alpha\delta, & \hat{\omega} \in \Omega_1; \\ -\delta &\leq B(\hat{\omega}, \bar{a}) \leq \delta, & \hat{\omega} \in \Omega_2; \\ \alpha &= \text{const}; \\ M &= \min; \\ \bar{a} &= \{a_k\}, & k = 0, 1, \dots, M, \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

где α – весовой коэффициент, связывающий допустимые отклонения от 1 в полосе пропускания δ_1 и отклонения от нуля в полосе задерживания δ_2 ; $\delta_1 = \alpha\delta_2$; Ω – частотный интервал интерполяции; $\Omega = [\Omega_1, \Omega_2]$; Ω_1 – полоса пропускания фильтра; $\Omega_1 \in [0, \hat{\omega}_\chi]$; Ω_2 – полоса задерживания $\Omega_2 \in [\hat{\omega}_k, \pi]$.

На **рис. 14.1** указаны требования к отклонениям в аппроксимируемых областях частот амплитудной функции и требования к соответствующей ей АЧХ ФНЧ.

Согласно **(14.6)** синтез оптимального фильтра достигается обеспечением допустимых отклонений $\delta_{\text{доп}}$ в интервалах интерполяции Ω минимальным порядком аппроксимируемого полинома M_{min} .

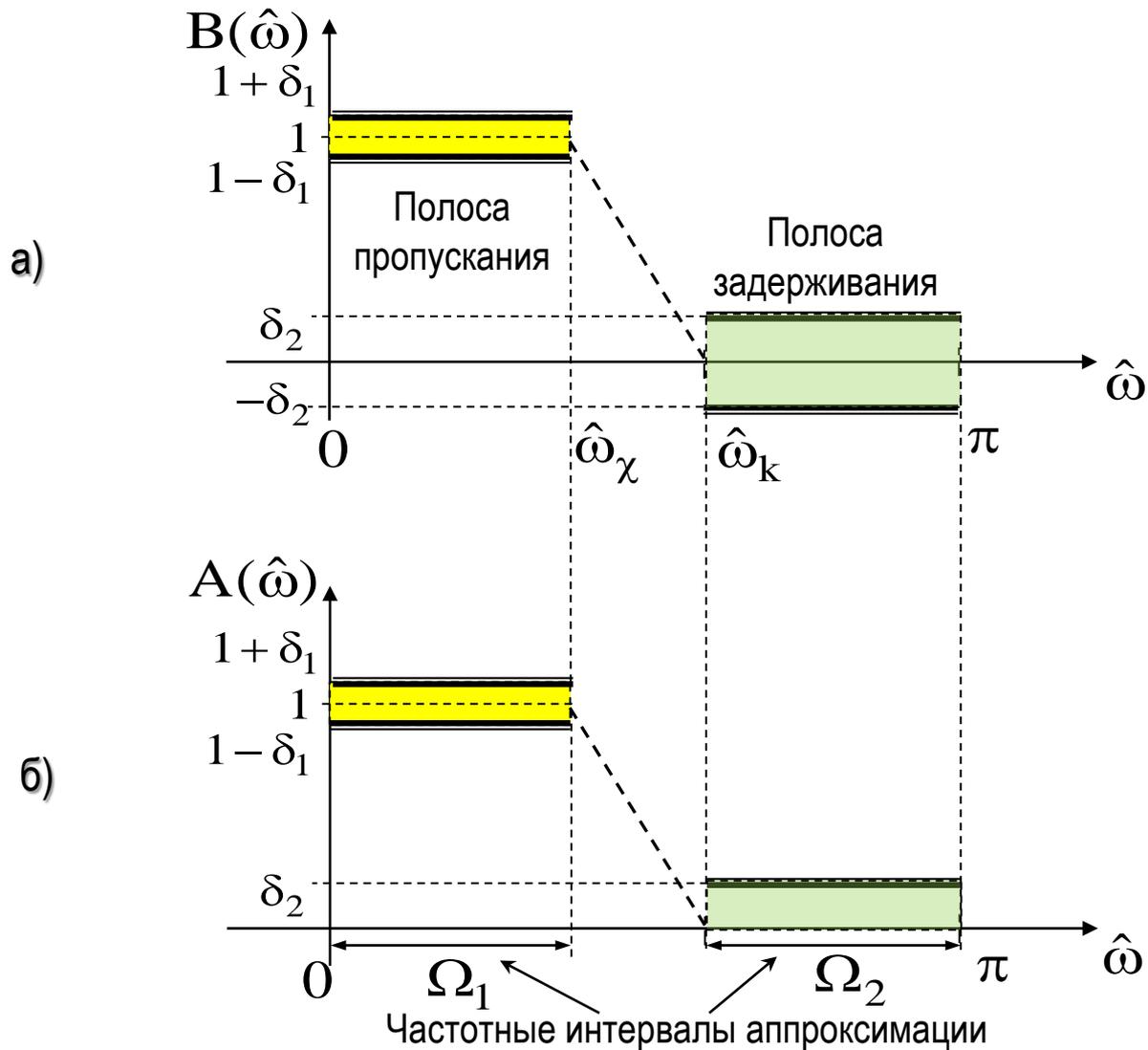


Рис. 14.1. Требования к характеристикам фильтра:
 а – требования к амплитудной функции; б – требования к АЧХ

Алгоритм оптимального синтеза

Процедура выполнения задачи (14.7) выполняется в несколько этапов.

На первом этапе выбирается примерный порядок полинома M_1 , на основе которого задача (14.7) сводится к поиску коэффициентов полинома $\vec{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_{M_1}\}$, соответствующих максимальным отклонениям частотной функции $\delta_{(1)\max}$ и сравнивается с допустимыми отклонениями $\delta_{\text{доп}}$. В случае если $\delta_{(1)\max} > \delta_{\text{доп}}$, выполняется следующий этап итерации при большем $M_2 > M_1$ и так далее, до тех пока не будет выполнено условие $\delta_{(l)\max} \leq \delta_{\text{доп}}$, что будет соответствовать оптимальному порядку аппроксимируемого полинома $M_{\text{опт}}$:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha\delta &\leq B(\hat{\omega}, \vec{a}) \leq 1 + \alpha\delta, & \hat{\omega} \in \Omega_1; \\ -\delta &\leq B(\hat{\omega}, \vec{a}) \leq \delta, & \hat{\omega} \in \Omega_2; \\ \alpha &= \text{const}; \\ \max_{\Omega} \delta &= \min_{\vec{a}}; \\ \vec{a} &= \{a_k\}, & k = 0, 1, \dots, M_{\text{опт}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

В противном случае, если $\delta_{(1)\max} < \delta_{\text{доп}}$ для поиска оптимального порядка полинома следующий этап процедуры (14.8) выполняется при пониженном $M_2 < M_1$ до выполнения условия $\delta_{(l)\max} \leq \delta_{\text{доп}}$ при наибольшем значении $\delta_{(l)\max}$.

14.2. Полином Чебышева

Результатом решения задачи аппроксимации оптимального фильтра Чебышева в частотной области является тригонометрический полином $B(\hat{\omega}, \vec{a})$ порядка $M=M_{\text{опт}}$:

$$B(\hat{\omega}, \vec{a}) = \sum_{k=0}^M a_k \cos[\varphi(\hat{\omega})], \quad (14.9)$$

т.е. задача сводится к поиску коэффициентов $\vec{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_M\}$ полинома $B(\hat{\omega}, \vec{a})$.

Функция $B(\hat{\omega}, \vec{a})$ является тригонометрическим полиномом:

$$B(\hat{\omega}, \vec{a}) = \sum_{k=0}^M a_k \cos[k\hat{\omega}] = \sum_{k=0}^M a_k \cos[k \arccos(x)] = \sum_{k=0}^M a_k C_k(x). \quad (14.10)$$

В данном выражении $x = \cos(\hat{\omega})$, откуда

$$\hat{\omega} = \arccos(x). \quad (14.11)$$

Само выражение $\cos[k \arccos(x)]$ также является полиномом k -го порядка, который называется полиномом Чебышева.

Полином Чебышева N-го порядка определяется выражением

$$C_N(x) = \cos[N \arccos(x)]. \quad (14.12)$$

Данный полином определен в области значений: $-1 \leq x \leq 1$. А сам полином Чебышева ограничен значениями: $-1 \leq C_N(x) \leq 1$.

Проведем анализ полиномов низших порядков:

$$C_0(x) = 1;$$

$$C_1(x) = \cos[\arccos(x)] = x;$$

$$C_2(x) = \cos[2 \arccos(x)] = 2x^2 - 1.$$

Из данных выражений следует закономерность, по которой конструкция полинома N-го порядка определяется рекуррентной формулой:

$$C_{N+1}(x) = 2xC_N(x) - C_{N-1}(x). \quad (14.13)$$

С учетом (14.13): $C_3(x) = 4x^3 - 3x;$

$$C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$C_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x;$$

и т. д.

На **рис. 14.2** показан график полинома 5-го порядка $C_5(x)$, анализ которого показывает, что данная функция имеет 5 пересечений с осью x и 6 раз достигает максимальных значений ± 1 . Данная закономерность выполняется для полиномов всех порядков, т.е. полином принимает значение 0 ровно N раз, а ± 1 – $N+1$ раз, причем знаки этих величин всегда чередуются.

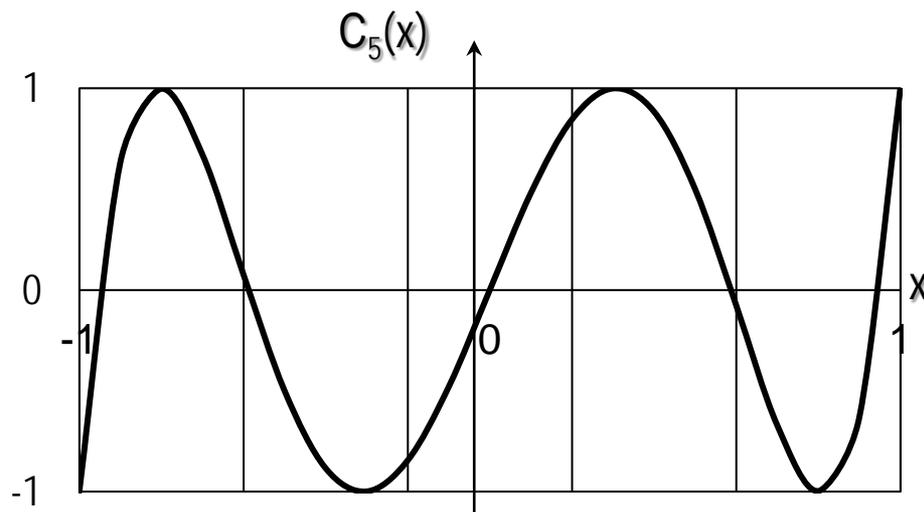


Рис. 14.2. График полинома $C_5(x)$

С учетом последней закономерности максимальные отклонения от **нуля** или **единицы** в тригонометрическом полиноме (14.12) $B(\hat{\omega}, \vec{a})$ будут зависеть от коэффициентов a_k : $-a_k \leq a_k C_N(x) \leq a_k$, а поставленная выше задача синтеза оптимального КИХ-фильтра должна решаться на **классе полиномов Чебышева**.

14.3. Теорема Чебышева

Задача оптимального синтеза в общем виде определяется задачей аппроксимации идеальной функции $\xi(\hat{\omega})$ **тригонометрическим полиномом Чебышева** $B(\hat{\omega}, \vec{a})$.

Для примера рассмотрим ФНЧ, идеальная частотная характеристика которого описывается выражением (рис. 14.3)

$$\xi(\hat{\omega}) = \begin{cases} 1, & \hat{\omega} \in \Omega_1, 0 \leq \hat{\omega} \leq \omega_\chi; \\ 0, & \hat{\omega} \in \Omega_2, \omega_k \leq \hat{\omega} \leq \pi. \end{cases} \quad (14.14)$$

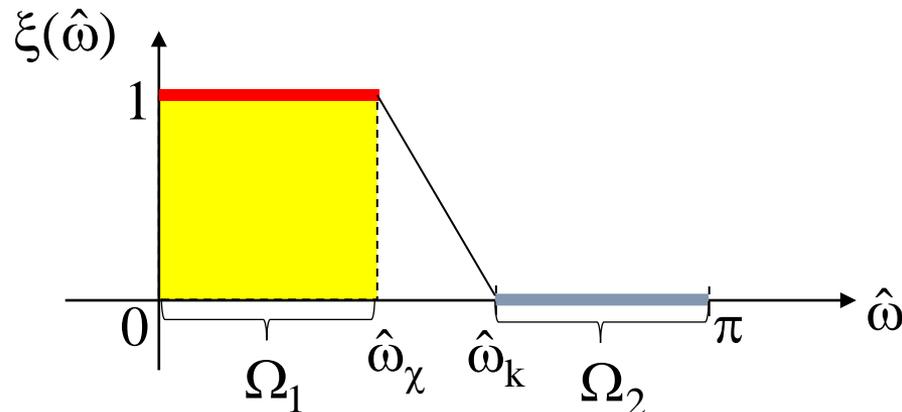


Рис. 14.3. Аппроксимируемая функция ФНЧ

Аппроксимирующая функция определяется

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha\delta \leq B(\hat{\omega}, \vec{a}) \leq 1 + \alpha\delta, \quad \hat{\omega} \in \Omega_1; \\ -\delta \leq B(\hat{\omega}, \vec{a}) \leq \delta, \quad \hat{\omega} \in \Omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (14.15)$$

В результате поэтапного решения поставленной задачи ошибка аппроксимации не должна превышать δ_2 .

Данная задача решается на классе полиномов Чебышева $C_k(x)$, в которой необходимо найти такой вектор коэффициентов $\vec{a} = \{a_k\}$ для тригонометрического полинома $B(\hat{\omega}, \vec{a})$ порядка $M = M_{\text{фикс}}$, при котором максимум модуля взвешенной ошибки аппроксимации на совокупности интервалов Ω был бы минимальным:

$$\max_{\omega \in \Omega} p(\hat{\omega}) |\xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \vec{a})| \Rightarrow \min_{\vec{a}} \quad (14.16)$$

где $\vec{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_M\}$ – искомый вектор коэффициентов; $p(\hat{\omega})$ – весовая функция;

$$p(\hat{\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \hat{\omega} \in \Omega_1; \\ 1, & \hat{\omega} \in \Omega_2; \end{cases} \quad (14.17)$$

$|\xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \vec{a})| = \delta$ – модуль ошибки аппроксимации.

Для решения такой задачи используется обобщенная теорема об **альтернансе (теорема Чебышева)**.

Обобщенная теорема Чебышева

С учетом линейности полинома $B(\hat{\omega}, \vec{a})$ [\[см.\(14.9\)\]](#) для поиска единственного решения необходимо и достаточно, чтобы абсолютный максимум взвешенной разности **(14.16)** достигался не менее чем в $M+2$ точках: $\hat{\omega}_1 < \hat{\omega}_2 < \dots < \hat{\omega}_l < \dots < \hat{\omega}_{M+2}$, в которых знаки разности

$$\delta(\hat{\omega}) = p(\hat{\omega})[\xi(\hat{\omega}) - B(\hat{\omega}, \vec{a})] \quad (14.18)$$

последовательно противоположны: $\delta_l(\hat{\omega}) = -\delta_{l-1}(\hat{\omega})$.

Совокупность точек $\{\hat{\omega}_l\}$, в которых разность $\delta(\hat{\omega})$ принимает равные по абсолютной величине и чередующиеся по знаку значения, называются **чебышевским альтернансом**, а сами частоты $\hat{\omega}_l$ – **частотами альтернанса**.

Частоты альтернанса могут располагаться эквидистантно или произвольно. На граничных частотах отклонение может быть неравным δ_{\max} , поэтому частоты $\hat{\omega} = 0$ и $\hat{\omega} = \pi$ могут не относиться к частотам альтернанса.

Так как для решения поставленной задачи оптимизации требуется большое число вычислений, процесс поиска альтернанса выполняется с помощью специальных программ. В этом случае для поиска частот альтернанса на каждом этапе при фиксированном $M_{\text{фикс}}$ берется много больше чем $M_{\text{фикс}} + 2$ частот и из них выбираются те частоты, на которых разность (14.18) принимает максимальные значения с чередованием знаков (рис. 14.4).

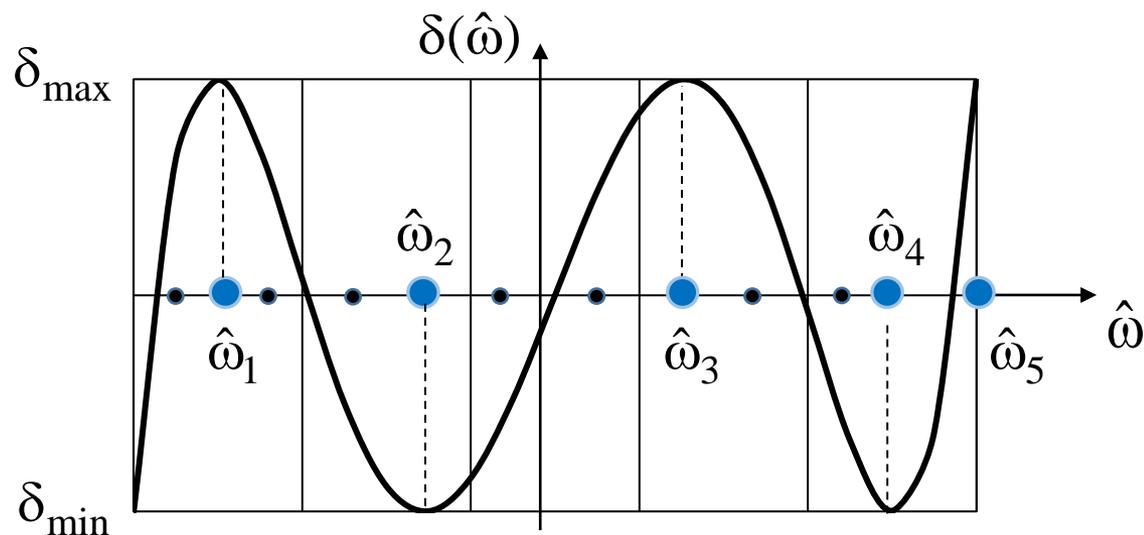


Рис. 14.4. Вариант чебышевского альтернанса (синими точками отмечены частоты альтернанса)

Таким образом, из теоремы об альтернансе (обобщенной теоремы Чебышева) следует:

- существует единственный полином $B(\hat{\omega}, \vec{a})$ наилучшего приближения порядка M , который обеспечивает минимум максимальной ошибки аппроксимации $\delta_{\max} = \min$;
- существует единственный полином наилучшего приближения при заданной ошибке аппроксимации δ , и этот полином имеет наименьший порядок $M = M_{\min}$;
- взвешенная ошибка $\delta(\hat{\omega})$ имеет равноволновой характер;
- количество частот альтернанса m не менее чем на два превышает порядок полинома $B(\hat{\omega}, \vec{a})$ или не менее чем на единицу превышает число варьируемых параметров $(L=M+1) a_k$, т.е. $m \geq M+2$.

Перечень контрольных вопросов:

1. [Методика синтеза оптимальных КИХ-фильтров Чебышева.](#)
2. [Алгоритм оптимального синтеза фильтра Чебышева.](#)
3. [Полинома Чебышева.](#)
4. [Теорема Чебышева. Чебышевский альтернанс.](#)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный в учебнике материал позволяет сформировать у студентов представление о принципах цифровых методов обработки сигналов и определенные навыки синтеза отдельных цифровых устройств, применяемых в инфокоммуникационных и других радиотехнических системах.

В результате изучения материала учебника формируются знания о принципах АЦП и ЦАП и требования к их параметрам с учетом характеристик обрабатываемых сигналов и шумов квантования в устройствах ЦОС.

Изучив материалы учебника, студенты получают знания и сформируют навыки выполнения спектрального анализа на базе преобразований Лапласа, Фурье, Уолша и Z-преобразования, применяемых в устройствах ЦОС.

Изучение рассмотренных принципов дискретных преобразований Фурье, БПФ и Уолша позволит студентам анализировать работу устройств, реализующих операции спектрального анализа и оценивать требования к их параметрам.

Немалый объем учебника уделен вопросам принципов построения и синтеза цифровых фильтров, в результате изучения которых студенты получат знания и навыки проектирования цифровых фильтров, широко применяемых в различных узлах цифровой обработки сигналов инфокоммуникационных и других радиотехнических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход: пер. с англ. 2-е изд. М.: Вильямс, 2004. 992 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов по специальности «Радиотехника». М.: Высшая школа, 2000. 462 с.
3. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989. 448 с.
4. Васильев В.П., Муро Э.Л., Смольский С.М. Основы теории и расчета цифровых фильтров: учеб. пособие для высших учебных заведений / под ред. С.М. Смольского. М.: Академия, 2009. 272 с.
5. Воробьев С.Н. Цифровая обработка сигналов: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования М.: Академия, 2013. 320 с.
6. Гадзиковский В.И. Методы проектирования цифровых фильтров. М.: Горячая линия, 2007. 216 с.
7. Гадзиковский В.И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов. М.: Радио и связь, 2004. 344 с.
8. Голдсмит А. Беспроводные коммуникации. М.: Техносфера, 2011. 904 с.
9. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: справочник. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
10. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1990. 256 с.



11. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов. М.: Дрофа, 2006. 719 с.
12. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов: пер. с англ. / под ред. В.А. Григорьева, К.Г. Финогенова. М.: Мир, 1988. 488 с.
13. Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Коржик В.И., Назаров М.В. Теория электрической связи: учебник для вузов / под ред. Д.Д. Кловского. М.: Связь, 1999. 432 с.
14. Иванов М.Т., Сергиенко А.Б., Ушаков В.Н. Теоретические основы радиотехники: учеб. пособие / под ред. В.Н. Ушакова. М.: Высшая школа, 2002. 306 с.
15. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Советское радио, 1975. 344 с.
16. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: учебник: пер. с англ. М.: Бином-Пресс, 2006. 656 с.
17. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
18. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов: пер. с англ. / под ред. А.Б. Сергиенко. 2-е изд. М.: Техносфера, 2007. 856 с.
19. Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 768 с.
20. Прокис Дж. Цифровая связь: пер. с англ. / под ред. Д.Д. Кловского. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.
21. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
22. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие 3-е изд. СПб.: Питер, 2011. 768 с.



23. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / пер. с англ. Е.Г. Грозы, В.В. Марченко, А.В. Назаренко, О.М. Ядренко; под ред. А.В. Назаренко 2-е изд. М.: Вильямс, 2003. 1104 с.
24. Смит С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников / пер. с англ. А. Ю. Линович, С. В. Витязева, И. С. Гусинского. М.: Додэка XXI, 2012. 720 с.
25. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган; пер. с англ. под ред. В.А. Диткина, Л.Н. Кармазиной. М.: Наука, 1979. 832 с.
26. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
27. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике: пер. с англ. / под ред. Р.Л. Добрушена, О.Б. Лупанова; с предисловием А.Н. Колмогорова. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. 832 с.



От автора

В представленном издании сделана попытка адаптированного и систематизированного представления сложного теоретического материала об основных математических методах анализа и преобразований цифровых сигналов, а также о принципах их обработки в различных цифровых узлах, используемых в инфокоммуникационных системах.

Для лучшего восприятия изучаемого материала в учебнике использовано большое число иллюстраций, отражающих способы представления и анализа цифровых сигналов, а также процессы, возникающие в цифровых трактах обработки.

Автор надеется, что представленная версия учебника позволит повысить эффективность обучения студентов вузов, а также будет полезна и удобна большому числу заинтересованных читателей.



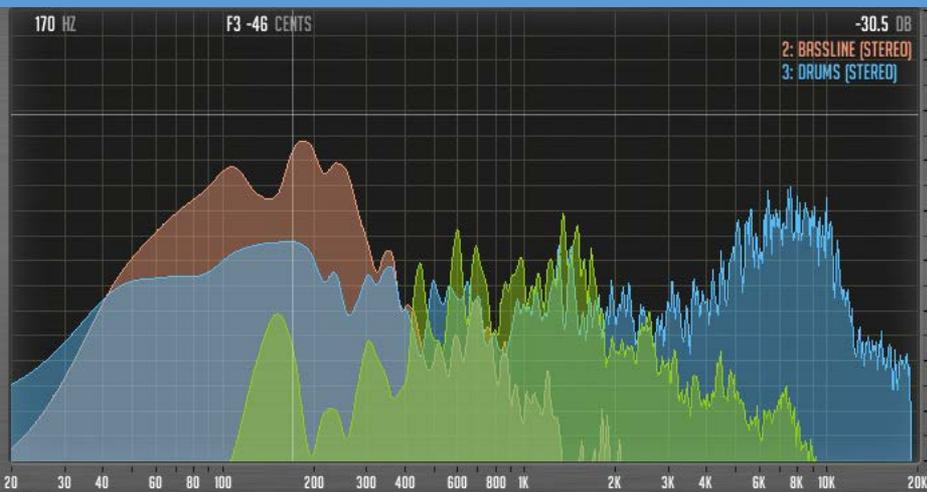
И.М. Орошук

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Учебник

Рекомендован для студентов технических вузов, обучающихся по направлению «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

Учебник может быть полезен инженерам-исследователям для анализа и проектирования устройств цифровой обработки сигналов.



Основные темы учебника:

- Способы представления сигналов
- Теоретические основы аналогово-цифрового преобразования сигналов. Теорема Котельникова
- Шумы квантования при аналогово-цифровом преобразовании
- Формы представления чисел в устройствах ЦОС
- Арифметические операции
- Шумы и предельные циклы, возникающие при вычислениях в системах ЦОС
- Спектральный анализ аналоговых сигналов
- Спектральный анализ дискретных сигналов. БПФ
- Применение функций Уолша для обработки сигналов
- Теория линейных дискретных систем
- Z -преобразование дискретных сигналов
- Синтез КИХ- и БИХ-фильтров
- Синтез оптимальных КИХ-фильтров методом окон
- Синтез оптимальных КИХ-фильтров Чебышева