Механика деформируемого твердого тела

DOI: <https://dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2019-2-2>
УДК 539.3

О.В. Ратманова

РАТМАНОВА ОЛЕСЯ ВИКТОРОВНА – ассистент кафедры строительной механики и сопротивления материалов, e-mail: olesya654@yandex.ru
Самарский государственный технический университет
Молодогвардейская ул., 244, Самара, 443001

Нестационарная задача прямого пьезоэффекта для асимметричной биморфной круглой пластины ступенчато переменной толщины

Аннотация: Рассматривается динамическая осесимметричная задача прямого пьезоэффекта для круглого двуслойного преобразователя, состоящего из металлической подложки и пьезокерамической пластины меньшего диаметра. Колебания электроупругой системы осуществляются за счет действия на ее лицевой поверхности механической нагрузки, являющейся произвольной функцией времени и радиальной координаты. Представленная математическая модель расчета позволяет учесть связанность продольно-поперечных колебаний асимметричной по высоте сечения конструкции. Новое аналитическое решение получено в рамках уточненной теории Тимошенко методом конечных интегральных преобразований. Построенные расчетные соотношения дают возможность подобрать геометрические размеры биморфной пластины, которые наиболее эффективно позволяют преобразовать механическую нагрузку в генерируемый электрический импульс. Рассматриваемые конструкции широко используются в качестве сенсорных выключателей, регулирующих работу клапанов различного назначения, которые применяются в устройствах ультразвуковой электроники и компьютерной технике.

Ключевые слова: асимметричная биморфная пластина, прямой пьезоэффект, электроупругость, динамическая нагрузка, замкнутое решение.

Введение

Для оценки эффективности работы и исследования напряженно-деформированного состояния составных электроупругих систем применяется в основном классическая прикладная теория для тонких пластин, в которой кинематические гипотезы дополняются аналогичными допущениями о характере изменения напряженности электрического поля по аксиальной координате [2, 7, 10, 12]. В данной постановке скорость распространения сдвиговых деформаций является неограниченной. Для устранения этого недостатка в задачах электроупругости [9] используется уточненная двухмодовая теория Тимошенко [5].

При исследовании конструкций, несимметричных относительно срединной поверхности, необходимо рассматривать связанные мембранные и изгибные колебания. В такой постановке можно отметить ограниченное количество построенных решений. В частности, в работе [4] замкнутое решение получено для прямоугольных анизотропных пластин ступенчато переменной толщины. Анализ работы асимметричного биморфного преобразователя постоянной толщины в случае действия гармонической механической нагрузки проведен в [6]. Анализ продольно-поперечных гармонических колебаний пластины переменного сечения посвящено

исследование [11]. Наконец, математическая модель для расчета изотропных асимметричных пластин гладко переменной толщины разработана в [1].

В настоящей работе исследуется асимметричная биморфная пластина типа металл-пьезокерамика ступенчато переменной толщины и жесткости. Автор предлагает построить новое замкнутое решение динамической задачи при учете связанности радиальных и изгибных деформаций методом конечных интегральных преобразований. Полученные расчетные соотношения позволят научно обосновать геометрические размеры многослойных пьезокерамических преобразователей резонансного и нерезонансного классов.

Постановка задачи

Пусть круглая биморфная пластина состоит из металлической заземленной подложки радиусом $r_* = b$ и толщиной h_2 , а также пьезокерамического аксиально поляризованного элемента с гексагональной кристаллической решеткой класса 6mm ($r_* = a$, $a < b$, h_1). Осесимметричные изгибные колебания образуются в результате действия на верхней лицевой поверхности конструкции механической нагрузки $q^*(r_*, t_*)$, являющейся произвольной функцией времени t_* и радиальной координаты r_* (рис. 1). Подключение электродированных поверхностей пьезокерамических пластин к измерительному прибору позволяет определить разность потенциалов $V^*(t_*)$. Условия закрепления цилиндрической поверхности ($r_* = b$) биморфной конструкции могут быть произвольными. Для определенности считаем ее жестко заземленной.

В цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) расположение поверхности $z = 0$ определяется из условия учета всех инерционных характеристик конструкции при построении замкнутого решения. Координаты нижней плоскости пьезокерамической пластины, а также нижней и верхней поверхностей подложки, соответственно обозначены: $z_1 = h_1 + e$, $z_2 = e$, $z_3 = e - h_2$, $e = \frac{\rho^{(2)}h_2^2 - \rho^{(1)}h_1^2}{2(\rho^{(2)}h_2 + \rho^{(1)}h_1)}$ ($\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ – объемная плотность пьезокерамики и металла).

Рис. 1. Расчетная схема биморфной конструкции.

Дифференциальные уравнения радиальных и изгибных осесимметричных колебаний биморфной пластины относительно нормальных $N_r(r_*, t_*)$, $N_\theta(r_*, t_*)$, поперечных $Q_r(r_*, t_*)$ сил, а также изгибающих моментов $M_r(r_*, t_*)$, $M_\theta(r_*, t_*)$, при использовании следующих кинематических гипотез

$$U^*(r_*, z, t_*) = U_0^*(r_*, t_*) - z\psi(r_*, t_*), \quad W^*(r_*, z, t_*) = W^*(r_*, t_*) \quad (1)$$

имеют вид

$$\frac{\partial N_r}{\partial r_*} + \frac{N_r - N_\theta}{r_*} - a_1 \frac{\partial^2 U_0^*}{\partial t_*^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_r}{\partial r_*} + \frac{Q_r}{r_*} - a_1 \frac{\partial^2 W^*}{\partial t_*^2} &= q^*(r_*, t_*), \\ \frac{\partial M_r}{\partial r_*} - Q_r + \frac{M_r - M_\theta}{r_*} + a_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_*^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где U^*, W^*, ψ – радиальные, аксиальные перемещения и угол поворота сечения в плоскости (r, z) ; U_0^* – радиальные перемещения поверхности при $z = 0$;

$$\begin{aligned} a_1 &= \rho^{(2)} h_2 H(a - r_*) + (\rho^{(1)} h_1 + \rho^{(2)} h_2) H(r_* - a), \\ a_2 &= \rho^{(2)} \frac{z_2^3 - z_3^3}{3} H(a - r_*) + \left(\rho^{(1)} \frac{z_1^3 - z_2^3}{3} + \rho^{(2)} \frac{z_2^3 - z_3^3}{3} \right) H(r_* - a), \end{aligned}$$

$H(\dots)$ – единичная ступенчатая функция О. Хэвисайда.

Подключение электродного покрытия пьезокерамической пластины к измерительному прибору с большим входным сопротивлением позволяет, из условия отсутствия тока смещения на внешнем лицевом электроде $D_{z|z=h_1+e} = 0$ [3], определить аксиальную компоненту вектора напряженности электрического поля $E_z(r_*, z, t_*)$, т.е.

$$E_z(r_*, z, t_*) = -\frac{e_{31}}{\varepsilon_{33}} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} \right). \quad (3)$$

Интегральные характеристики напряженного состояния составной конструкции определяются в виде следующих соотношений:

$$N_{r(\theta)} = \int_{z_1}^{z_3} \sigma_{rr(\theta\theta)} dz, \quad Q_r = k_{1(2)} \int_{z_1}^{z_3} \sigma_{rz} dz, \quad M_{r(\theta)} = \int_{z_1}^{z_3} \sigma_{rr(\theta\theta)} z dz, \quad (4)$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rz}$ – компоненты тензора механических напряжений, k_1, k_2 – коэффициенты поперечного сдвига.

В результате подстановки (4) в (2), с учетом гипотез (1), (3), получаем следующую систему дифференциальных уравнений в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} p_1 \frac{\partial}{\partial r} \nabla U_0 - p_2 \frac{\partial}{\partial r} \nabla \psi - a_3 \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} &= 0, \\ p_3 \left(\nabla \frac{\partial W}{\partial r} - \nabla \psi \right) - a_3 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= q, \\ p_4 \frac{\partial}{\partial r} \nabla \psi + p_3 \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \psi \right) - p_2 \frac{\partial}{\partial r} \nabla U_0 - a_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\{W, U_0, r, R\} = \{W^*, U_0^*, r_*, a\} / b$, $t = \frac{t_*}{b} \sqrt{\frac{C_{11}^{(2)}}{\rho^{(2)}}}$, $q = \frac{q^*}{m_1}$,

$$a_3 = \frac{a_1}{\rho^{(2)} h_2}, \quad a_4 = \frac{a_2}{\rho^{(2)} b^2 h_2}, \quad \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{vmatrix} = m_1^{-1} \begin{vmatrix} m_1 & m_5 \\ m_3 b^{-1} & m_7 b^{-1} \\ m_9 & m_{10} \\ m_{11} b^{-2} & m_{13} b^{-2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} H(r - R) \\ H(R - r) \end{vmatrix}.$$

Краевые условия в безразмерной форме имеют вид:

$$r=1,0 \quad U_0(1,t)=0, \quad W(1,t)=0, \quad \psi(1,t)=0, \quad (6)$$

$$U_0(0,t)<\infty, \quad W(0,t)<\infty, \quad \psi(0,t)<\infty,$$

$$t=0 \quad U_0(r,0)=u_0(r), \quad W(r,0)=W_0(r), \quad \psi(r,0)=\psi_0(r), \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{u}_0(r), \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\psi}_0(r),$$

где $m_{1(2)} = C_{11(12)}^{(2)} h_2$, $m_{3(4)} = C_{11(12)}^{(2)} m_{17}$, $m_{5(6)} = m_{1(2)} + \left(C_{11(12)}^{(1)} + \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}} \right) h_1$,

$$m_{7(8)} = m_{3(4)} + \left(C_{11(12)}^{(1)} + \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}} \right) m_{15}, \quad m_9 = k_2 C_{55}^{(2)} h_2, \quad m_{10} = k_1 \left(C_{55}^{(2)} h_2 + C_{55}^{(1)} h_1 \right),$$

$$m_{11(12)} = C_{11(12)}^{(2)} m_{18}, \quad m_{13(14)} = m_{11(12)} + \left(C_{11(12)}^{(1)} + \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}} \right) m_{16},$$

$$m_{15} = \frac{z_1^2 - z_2^2}{2}, \quad m_{16} = \frac{z_1^3 - z_2^3}{3}, \quad m_{17} = \frac{z_2^2 - z_3^2}{2}, \quad m_{18} = \frac{z_2^3 - z_3^3}{3},$$

e_{31}, ε_{33} – постоянные пьезокерамического материала; $C_{mk}^{(s)}$ – модули упругости электроупругого ($s=1$) и упругого ($s=2$) материалов ($m, k=1, 2, 5$); $W_0, u_0, \psi_0, \dot{W}_0, \dot{u}_0, \dot{\psi}_0$ – заданные при $t=0$ перемещения и их скорости.

Для данного конструктивного решения электрическое напряжение холостого хода $V^*(t_*)$ определяется следующим образом:

$$V(t_*) = S^{-1} \int_{(S)} \phi(r_*, z_1, t_*) dS,$$

где $\phi(r_*, z_1, t_*)$ – потенциал электрического поля, генерируемый на нижней лицевой поверхности пьезокерамической пластины ($E_z = -\partial\phi/\partial z$), S – площадь электроупругой пластины.

Окончательное выражение функции $V(t_*)$ имеет следующий вид:

$$V(t_*) = \frac{e_{31}}{\varepsilon_{33}} \frac{h_1}{a} \left[2U_0^*(a, t_*) - (h_1 + 2e) \psi(a, t_*) \right]. \quad (8)$$

Построение общего решения

Для решения начально-краевой задачи (5)–(7) введем на сегменте $[0,1]$ конечное интегральное преобразование (КИП) [8] с неизвестными компонентами $K_1(\lambda_i, r)$, $K_2(\lambda_i, r)$, $K_3(\lambda_i, r)$ вектор-функции ядра преобразования и весовыми функциями α, β, γ :

$$G(\lambda_i, t) = \int_0^1 \left[\alpha U_0(r, t) K_1(\lambda_i, r) + \beta W(r, t) K_2(\lambda_i, r) + \gamma \psi(r, t) K_3(\lambda_i, r) \right] r dr, \quad (9)$$

$$\{U_0(r, t), W(r, t), \psi(r, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r), K_3(\lambda_i, r)\} \|K_i\|^{-2}, \quad (10)$$

$$\|K_i\|^2 = \int_0^1 \left[\alpha K_1^2(\lambda_i, r) + \beta K_2^2(\lambda_i, r) + \gamma K_3^2(\lambda_i, r) \right] r dr,$$

где λ_i – безразмерные круговые частоты осесимметричных колебаний ($i = \overline{1, \infty}$), связанные с размерными частотами ω_i следующей зависимостью:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i}{b} \sqrt{\frac{C_{11}^{(2)}}{\rho^{(2)}}}. \quad (11)$$

Представляя кусочно-гладкие функции $U_0(r, t)$, $W(r, t)$, $\psi(r, t)$ в виде

$$\{U_0, W, \psi\} = \{U_0^{(a)}, W^{(a)}, \psi^{(a)}\} H(r - R) + \{U_0^{(b)}, W^{(b)}, \psi^{(b)}\} H(R - r), \quad (12)$$

подвергаем систему уравнений (5) и начальные условия (7) преобразованиям КИП в соответствии со структурным алгоритмом [8]. В результате получаем начальную задачу для трансформанты $G(\lambda_i, t)$, общий интеграл которой имеет вид

$$G(\lambda_i, t) = G_0 \cos(\lambda_i t) + \dot{G}_0 \sin(\lambda_i t) / \lambda_i - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau. \quad (13)$$

и, с учетом (6), однородную задачу для компонент ядра КИП

$$p_1 \frac{d}{dr} \nabla K_1^{(j)} - p_2 \frac{d}{dr} \nabla K_3^{(j)} \psi + a_3 \lambda_i^2 K_1^{(j)} = 0, \quad (j = a, b) \quad (14)$$

$$p_3 \left(\nabla \frac{dK_2^{(j)}}{dr} - \nabla K_3^{(j)} \right) + a_3 \lambda_i^2 K_2^{(j)} = 0,$$

$$p_4 \frac{d}{dr} \nabla K_3^{(j)} + p_3 \left(\frac{dK_2^{(j)}}{dr} - K_3^{(j)} \right) - p_2 \frac{d}{dr} \nabla K_1^{(j)} + a_4 \lambda_i^2 K_3^{(j)} = 0,$$

$$r = 1, 0 \quad K_1^{(a)}(\lambda_i, 1) = K_2^{(a)}(\lambda_i, 1) = K_3^{(a)}(\lambda_i, 1) = 0, \quad (15)$$

$$\{K_1^{(b)}(\lambda_i, 0), K_2^{(b)}(\lambda_i, 0), K_3^{(b)}(\lambda_i, 0)\} < \infty,$$

$$r = R: K_1^{(a)}(\lambda_i, R) = K_1^{(b)}(\lambda_i, R), \quad K_2^{(a)}(\lambda_i, R) = K_2^{(b)}(\lambda_i, R), \quad (16)$$

$$K_3^{(a)}(\lambda_i, R) = K_3^{(b)}(\lambda_i, R), \quad m_9 \left(\frac{dK_2^{(a)}}{dr} - K_3^{(a)} \right) \Big|_{r=R} = m_{10} \left(\frac{dK_2^{(b)}}{dr} - K_3^{(b)} \right) \Big|_{r=R},$$

$$\left(m_1 \frac{\partial U_0}{\partial r} + m_2 \frac{U_0}{r} - \frac{m_3}{b} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{m_4}{b} \frac{\psi}{r} \right) \Big|_{r=R} = \left(m_5 \frac{\partial U_0}{\partial r} + m_6 \frac{U_0}{r} - \frac{m_7}{b} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{m_8}{b} \frac{\psi}{r} \right) \Big|_{r=R},$$

$$\left(m_3 \frac{\partial U_0}{\partial r} + m_4 \frac{U_0}{r} - \frac{m_{11}}{b} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{m_{12}}{b} \frac{\psi}{r} \right) \Big|_{r=R} = \left(m_7 \frac{\partial U_0}{\partial r} + m_8 \frac{U_0}{r} - \frac{m_{13}}{b} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{m_{14}}{b} \frac{\psi}{r} \right) \Big|_{r=R}.$$

$$\text{Здесь } \{K_1, K_2, K_3\} = \{K_1^{(a)}, K_2^{(a)}, K_3^{(a)}\} H(r - R) + \{K_1^{(b)}, K_2^{(b)}, K_3^{(b)}\} H(R - r),$$

$$F(\lambda_i, t) = \int_0^1 a_3^{-1} q(r, t) \beta K_2(\lambda_i, r) r dr, \quad \alpha = \beta = 1, \quad \gamma = \frac{a_4}{a_3},$$

$$G_0(\lambda_i) = \int_0^1 (\alpha u_0 K_1 + \beta W_0 K_2 + \gamma \psi_0 K_3) r dr,$$

$$\dot{G}_0(\lambda_i) = \int_0^1 (\alpha \dot{u}_0 K_1 + \beta \dot{W}_0 K_2 + \gamma \dot{\psi}_0 K_3) r dr.$$

Равенства (16) определяют условия неразрывности деформаций и усилий в области нерегулярности структуру конструкции при $r = R$, которые формируются при выполнении равенств:

$$U_0^{(a)}(R, t) = U_0^{(b)}(R, t), \quad W^{(a)}(R, t) = W^{(b)}(R, t), \quad \psi^{(a)}(R, t) = \psi^{(b)}(R, t), \\ N^{(a)}(R, t) = N^{(b)}(R, t), \quad Q^{(a)}(R, t) = Q^{(b)}(R, t), \quad M^{(a)}(R, t) = M^{(b)}(R, t).$$

Для решения краевой задачи (14)–(16) вводятся новые функции $R_1^{(j)}(\lambda_{in}, r)$, $R_2^{(j)}(\lambda_{in}, r)$, $R_3^{(j)}(\lambda_{in}, r)$ по формулам:

$$R_1^{(j)}(\lambda_{in}, r) = rK_1^{(j)}(\lambda_{in}, r), \quad R_2^{(j)}(\lambda_{in}, r) = r \frac{dK_2^{(j)}(\lambda_{in}, r)}{dr}, \quad R_3^{(j)}(\lambda_{in}, r) = rK_3^{(j)}(\lambda_{in}, r), \quad (17)$$

и тогда система (14) приводится к следующему дифференциальному уравнению относительно $R_3^{(j)}(\lambda_{in}, r)$:

$$(\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + f_1 \nabla^2 \nabla^2 + f_2 \nabla^2 + f_3) R_3^{(j)} = 0, \quad (18)$$

где $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$, $f_1 = \frac{n_2 + n_4}{n_1} + \frac{a_3 \lambda_i^2}{p_3}$, $f_3 = (n_1 p_3)^{-1} a_3 \lambda_i^2 n_3$,

$$f_2 = n_1^{-1} n_3 + (n_1 p_3)^{-1} (a_3 \lambda_i^2 n_2 + n_5 p_3), \quad n_2 = p_1 (a_4 \lambda_i^2 - p_3) - p_2^2 + a_3 \lambda_i^2 p_4,$$

$$n_1 = p_1 p_4, \quad n_3 = a_3 \lambda_i^2 (a_4 \lambda_i^2 - p_3), \quad n_4 = p_1 p_3, \quad n_5 = a_3 \lambda_i^2 p_3.$$

Использование порождающего уравнения

$$\nabla^2 R_3^{(j)} = -\beta_i^2 R_3^{(j)},$$

позволяет сформулировать следующее бикубическое характеристическое уравнение:

$$(\beta_i^2)^3 - f_1 (\beta_i^2)^2 + f_2 \beta_i^2 - f_3 = 0. \quad (19)$$

Отношение физических характеристик материалов, используемых при изготовлении данной конструкции, позволяет получить следующие корни уравнения (19): β_{1i}, β_{2i} – действительные положительные числа, β_{3i} – мнимое число.

В этом случае общий интеграл дифференциального уравнения (18) записывается в виде

$$R_3^{(j)}(\lambda_i, r) = r \left[\sum_{e=1}^2 D_{(2e-1)i}^{(j)} J_1(\beta_{ei} r) + D_{(2e)i}^{(j)} Y_1(\beta_{ei} r) \right] + D_{5i}^{(j)} I_1(\beta_{3i} r) + D_{6i}^{(j)} K_1(\beta_{ei} r), \quad (20)$$

где $J_\mu(\dots), Y_\mu(\dots), I_\mu(\dots), K_\mu(\dots)$ – обыкновенные и модифицированные функции Бесселя I и II рода порядка μ ($\mu = 0, 1$).

Выражения для компонент ядра преобразования $K_1^{(j)}(\lambda_i, r), K_2^{(j)}(\lambda_i, r), K_3^{(j)}(\lambda_i, r)$ определяются, с учетом (17) и связей, полученных в процессе приведения (14) к (18):

$$R_2^{(j)} = \frac{p_3}{a_3 \lambda_i^2 n_4 - p_3 n_5} [n_1 \nabla^2 \nabla^2 + (n_2 + n_4) \nabla^2 + n_3] R_3^{(j)},$$

$$R_1^{(j)} = p_2^{-1} [p_3 R_2^{(j)} + p_4 \nabla^2 R_3^{(j)} + (a_4 \lambda_i^2 - p_3) R_3^{(j)}].$$

Подстановка $K_1^{(j)}, K_2^{(j)}, K_3^{(j)}$ в граничные условия (15), (16) позволяет определить постоянные $D_{1i}^{(a)} \dots D_{6i}^{(a)}, D_{1i}^{(b)} \dots D_{3i}^{(b)}$ и собственные значения λ_i .

Применяя к выражению трансформанты (13) формулы обращения (10), получаем общие выражения для безразмерных динамических компонент перемещения $U_0(r, t)$, $W(r, t)$ и проекции угла поворота сечения $\psi(r, t)$.

Пример расчета

В качестве примера рассматривается биморфная конструкция, состоящая из металлической подложки из латуни ($h_2 = 0.5 \times 10^{-3}$ м, $b = 3 \times 10^{-2}$ м) и пьезокерамической пластины состава ЦТС–19. Используются следующие физические характеристики материалов: латунь – $E = 9.8 \times 10^{10}$ Н/м², $\nu = 0.35$, $\rho = 8600$ кг/м³, E, ν, ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность изотропного материала ($C_{11}^{(2)} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $C_{12}^{(2)} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $C_{55}^{(2)} = \frac{E}{2(1+\nu)}$); пьезокерамика – $\varepsilon_{33} = 7.26 \times 10^{-9}$ Ф/м, $e_{31} = -4.9$ Кл/м²,

$$\{C_{11}^{(1)}, C_{12}^{(1)}, C_{55}^{(1)}\} = \{10.9, 9.1, 6.1, 5.4, 2.4\} \times 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

Рассмотрим случай действия гармонической нагрузки:

$$q(r, t) = q_0(1-r)\sin \chi t,$$

где q_0, χ – амплитуда нагрузки и частота вынужденных колебаний в безразмерной форме.

На рис. 2 представлены графики изменения по времени вертикальных перемещений биморфной системы $W(0, t)$ (сплошная линия) и разности потенциалов между электродированными поверхностями пьезокерамической пластины $V(t)$ (пунктирная линия), а на рисунках 3, 4 показаны зависимости изменения амплитудных значений разности потенциалов $V(t)$ при различных значениях геометрических размеров пьезокерамической пластины.

Рис. 2. Изменение $W(0, t)$, $V(t)$ по времени t ($h_1 = 0.5 \times 10^{-3}$ м, $a = 1.8 \times 10^{-2}$ м, $\chi = 0.8\lambda_1$).

Численный анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

1) при высокочастотном внешнем воздействии $\chi = 0.8\lambda_1$ эффект «биения», наблюдаемый в конструкции при вычислении вертикальных перемещений $W(0, t)$, также распространяется на характер изменения $V(t)$ по времени;

2) анализ результатов расчета, полученных для пластины постоянной и ступенчато переменной толщины, показывает, что уменьшение жесткости конструкции при $a < b$ приводит к росту перемещений $W(0, t)$ и разности потенциалов $V(t)$;

3) для заданной металлической подложки ($b = 3 \times 10^{-2}$ м, $h_2 = 0.5 \times 10^{-3}$ м) можно подобрать геометрические размеры пьезокерамической пластины, позволяющие наиболее эффективно преобразовать механическую нагрузку в электрический импульс, в частности, в данном примере необходимо использовать следующие параметры: $R = 0.62$ ($a = 1.86 \times 10^{-2}$ м), $h_1 = 0.9 \times 10^{-3}$ м.

Рис. 3. Зависимость амплитудного значения $V(t)$ от радиуса пьезокерамической пластины R ($\chi = 0.2\lambda_1$).

Рис. 4. Зависимость амплитудного значения $V(t)$ от толщины пьезокерамической пластины h_1 ($\chi = 0.2\lambda_1$).

Заключение

Полученные результаты расчета показывают, что для описания работы и повышения функциональных возможностей рассматриваемой конструкции необходимо использовать математическую модель, наиболее полно учитывающую динамические характеристики электроупругой системы. Поэтому исследование биморфной пластины, даже при гармоническом на нее воздействии вследствие наложения волн деформирования, нельзя проводить в рамках установившегося режима вынужденных колебаний, обычно применяемого при решении данного типа задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих изотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины (асимметричные случаи) // Инженерно-строительный журнал. 2010. № 8. С. 47–55.

2. Ватульян А.О., Рынкова А.А. Об одной модели изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с разрезными электродами и ее приложениях // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 4. С. 114–122.
3. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев: Наукова думка, 1989. 279 с.
4. Еленицкий Э.Я., Дьяченко Ю.П. Применение метода начальных параметров к решению нестационарной задачи динамики для прямоугольной пластины ступенчатого сечения // Изв. вузов. Строительство. 1997. № 11. С. 13–18.
5. Паймушин В.Н. Соотношение теории тонких оболочек типа теории Тимошенко при произвольных перемещениях и деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 5. С. 135–149.
6. Рудницкий С.И., Шарапов В.М., Шульга Н.А. Колебания дискового биморфного преобразователя типа металл–пьезокерамика // Прикл. механика. 1990. Т. 26, № 10. С. 64–71.
7. Савин В.Г., Бабаев А.Э. Действие акустического импульса на плоскую электроупругую систему из биморфов // Інформаційні системи механіка та керування: сб. Киев: Нац. техн. ун-т України. 2009. Вып. 3. С. 30–39.
8. Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований – обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям // Изв. Саратовского ун-та. Сер. Матем., механика, информатика. 2011. № 3(1). С. 61–89.
9. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания пьезокерамической тонкой биморфной пластины // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 2. С. 77–85.
10. Янчевский И.В. Управление колебаниями изгиба круглого асимметричного биморфного пьезопреобразователя с разрезными электродами // Проблемы машиностроения. 2012. Т. 15, № 2. С. 37–43.
11. Dzyuba V.A., Steblyanko P.O. Use of splines in the calculation of deflections for plates of variable thickness. Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences, II(4). 2014; 32:41–47.
12. Wang Y., Xu R.Q., Ding H.J. Analytical solutions of functionally graded piezoelectric circular plates subjected to axisymmetric loads. Acta Mechanica. 2010(215);1–4:287–305.

FEFU: SCHOOL of ENGINEERING BULLETIN. 2019. N 2/39
Mechanics of Deformable Solids

www.dvfu.ru/en/vestnikis

DOI: <https://dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2019-2-2>

Ratmanova O.

OLESYA RATMANOVA, Assistant, Department of Building Mechanics
 and Structural Resistance, e-mail: olesya654@yandex.ru
Samara State Technical University
 244 Molodogvardeyskaya St., Samara, Russia, 443001

Non-stationary direct piezoelectric effect task for an asymmetric bimorph round plate with stepped variable thickness

Abstract: Consideration is being given to the dynamic axisymmetric problem of direct piezoelectric effect for a circular two-layer transducer consisting of a metal substrate and a piezoceramic plate of smaller diameter. The oscillations of the electroelastic system are carried out due to the action of a mechanical load on its front surface, which is an arbitrary function of time and radial coordinate. The presented mathematical model of calculation allows to take into consideration the coherence of longitudinal-transverse oscillations of a structure that is asymmetric in height. The new analytical solution is obtained within the framework of the refined Timoshenko theory by the method of finite integral transformations. The calculated ratios make it possible to choose the geometric dimensions of the bimorphic plate, which most effectively allow to convert the mechanical load into the generated electri-

cal pulse. The considered designs are widely used as touch switches that regulate the operation of valves for various purposes.

Keywords: asymmetric bimorphic plate, direct piezoelectric effect, electroelasticity, dynamic load, closed solution.

REFERENCES

1. Abdikarimov R.A., Zhgutov V.M. Mathematical models of problems of nonlinear dynamics of viscoelastic isotropic plates and shells of smooth variable thickness (asymmetric cases). *Civil Engineering Journal*. 2010;8:47–55.
2. Vatulyan A.O., Rynkov A.A. A model of Flexural vibrations of piezoelectric bimorphs with split electrodes and its applications. *Izv. Russian Academy of Sciences. MTT*. 2007;4:114–122.
3. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulga N.Ah. *Mechanics of related fields in design Elements*. Kyiv, Sciences Dumka, 1989, 279 p.
4. Elnicki E.J., Dyachenko P.Y. Application of the method of initial parameters to the solution of unsteady problems of dynamics for a rectangular plate stepped section. *Izv. Higher Educational. Construction*. 1997; 11:13–18.
5. Paymushin V.N. The ratio of the theory of thin shells such as the theory of Tymoshenko with arbitrary displacements and deformations. *Applied mechanics and technical physics*. 2014(55);5:P.135–149.
6. Rudnitsky S.I., Sharapov V.M., Shulga N.A. Vibrations of disk bimorph transducer of the type metal-piezoceramics. *Prikl. Mechanics*. 1990(26);10:64–71.
7. Savin V.G., Babaev A.E. The Effect of acoustic pulse with flat elastic and electric system of bimorph *Information system mechani Caruana*. Kyiv, National Technica Un-t Ukraine. 2009;3:30–39.
8. Senitskiy Yu.E. Method of finite integral transformations is a generalization of the classical procedure of expansion in eigen vector-functions. *Izv. Saratov Un-ta. Series. Mathematics, Mechanics, Informatics*. 2011;3:61–89.
9. Shlyakhin D.A. Forced axisymmetric vibrations of a piezoceramic thin bimorph plate. *Izv. Russian Academy of Sciences. MTT*. 2013;2:77–85.
10. Yanchevskii I.V. Control of oscillation of the bending of circular piezoelectric transducer asymmetrical bimorph with split electrodes. *Problems. Mechanical Engineering*, 2012(15); 2:37–43.
11. Dzyuba V.A., Steblyanko P.O. Use of splines in the calculation of deflections for plates of variable thickness. *Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences*, II(4). 2014; 32:41–47.
12. Wang Y., Xu R.Q., Ding H.J. Analytical solutions of functionally graded piezoelectric circular plates subjected to axisymmetric loads. *Acta Mechanica*. 2010(215);1–4:287–305.