Механика деформируемого твердого тела

DOI: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-1-2>
УДК 624.074.434

О.Е. Сысоев, А.Ю. Добрышкин

СЫСОЕВ ОЛЕГ ЕВГЕНЬЕВИЧ – д.т.н., профессор, декан факультета кадастра и строительства, AuthorID: 446982, SPIN: 7349-3397, ScopusID: 54080506700, e-mail: fks@knastu.ru
ДОБРЫШКИН АРТЕМ ЮРЬЕВИЧ – к.т.н., доцент кафедры строительства и архитектуры, AuthorID: 1053174; SPIN: 7837-8971, ScopusID: 57199398851, e-mail: www.artem21@mail.ru
Комсомольский-на-Амуре государственный университет
Проспект Ленина, 27, г. Комсомольск-на-Амуре, Хабаровский край, Россия, 681013

Собственные колебания полой оболочки со смешанными граничными условиями «защемление–шарнир» и малой присоединенной массой

Аннотация: Разомкнутые цилиндрические оболочки широко используются в современных конструкциях, применяемых в строительстве, авиации, энергетике, нефтяной и других отраслях промышленного производства. В процессе эксплуатации оболочечные конструкции испытывают кратковременные воздействия циклического характера, вызывающие вынужденные колебания зданий и сооружений, которые являются причиной запуска внутренних динамических механизмов. Эти механизмы изменяют собственные колебания сооружений, что существенно влияет на прочностные характеристики оболочки. Часто на таких конструкциях размещаются присоединённые массы: двигатели летательных аппаратов, антенные установки, подвесные топливные баки, кондиционеры, фонари, смотровые площадки. Присоединённые массы изменяют напряженно-деформируемое состояние и параметры собственных колебаний оболочки. Это приводит к изменению частоты и амплитуды колебаний зданий и вызывает явление резонанса, что может разрушить сооружения. Новая математическая модель разработана авторами данной статьи для более точного расчета колебаний оболочки. Использование этой модели позволит избежать нежелательных последствий в виде негативных деформаций, например зданий и сооружений, оболочечных конструкций, машин и механизмов и др. Математическая модель разработана на основе общего уравнения колебаний пластины – уравнения Жермен–Лагранжа с дополнительным членом, физический смысл которого – начальная неправильность формы в виде малой присоединенной массы. Математическая модель рассчитана при смешанных граничных условиях «защемление–шарнир». В качестве допущений приняты гипотезы Кирхгофа–Лява. Проанализирован механизм собственных колебаний разомкнутой оболочки со смешанными граничными условиями «защемление–шарнир» и присоединенной массой. С помощью рекурсивной теории возмущений, конвертируемой в аппроксимацию Паде, определены частотные характеристики и значения первого собственного числа задачи при параметре волнообразования, равном единице. При помощи метода интегральных уравнений рассмотрено поведение разомкнутой оболочки с малой присоединенной массой. Построены зависимости влияния длины участков защемления на пер-

вое собственное число частот свободных колебаний: зависимости рассчитаны с помощью рекурсивной теории возмущений, аппроксимации Паде и метода интегральных уравнений. Все три кривые дают практически одинаковые результаты для всех значений параметра волнообразования, что говорит о высокой надежности разработанной математической модели колебаний разомкнутых тонкостенных оболочек с малой присоединенной массой. Результаты полученных в данной статье исследований могут быть полезны для организаций, занимающихся проектированием конструкций, состоящих или имеющих включения в виде пластин и пологих разомкнутых оболочек.

Ключевые слова: разомкнутая оболочка, колебания, присоединенная масса, частотный спектр, шарнирное описание, частота.

Введение

Колебаниями разомкнутых и замкнутых оболочек занимались многие исследователи: Кубенко В.Д., Тимошенко С.П., Варадан Т.К., Галченко А.Л., Доннелл Л.Г., Дышко А.П., Лейзерович Г.С., Лиходед А.И., Малинин А.А., Муштари Х.М., Тарануха Н.А., Amabili M., Kattimani S.C., Lee T.H., Lew R.S., Mallon N.J. Установлено, что малая присоединенная масса запускает механизм взаимодействия сопряженных изгибных форм разомкнутой оболочки. Данное обстоятельство приводит к удвоению (расщеплению) изгибного частотного спектра собственных колебаний оболочки. Кроме того, установлено наложение сразу нескольких частотных спектров. Учитывая данные обстоятельства, можно утверждать, что при динамическом воздействии на оболочку, несущую малую присоединенную массу, повышается шанс возникновения резонанса. Это подтверждается в публикациях о колебаниях круговых разомкнутых цилиндрических оболочек и изогнутых пластин, несущих присоединенную массу [8, 11]. Известные исследования [1, 4, 8, 11, 15] показывают уменьшение собственных частот колебаний оболочек при прикреплении присоединенной массы. Параметры волнообразования включают геометрические характеристики присоединенной массы, площадь крепления, в то же время взаимодействие сопряженных изгибных форм исследовано недостаточно, а иногда вообще не учитывается, и данные обстоятельства требуют детального изучения. В работах [8, 11] определена зависимость места крепления присоединенной массы и частотной характеристики колебаний. Однако в последующем, когда было учтено взаимодействие сопряженных изгибных форм, выяснено, что изгибный частотный спектр удваивается, при этом частоты не зависят от координаты места крепления присоединенной массы к оболочке, что вписывается в представления о динамическом поведении оболочки, несущей малую присоединенную массу.

Исследования изгибных колебаний оболочек экспериментального характера показывают некоторые особенности их поведения, не совпадающие с известными работами [1, 4, 8].

В соответствии с традиционным решением при низшем тоне колебаний оболочки, несущей присоединенную массу, та частота, которая оказалась наименьшей из расщепленных собственных частот, напрямую связана с величиной присоединенной массы. Однако рассмотрение проведенных ранее теоретических исследований говорит о том, что результат снижения частоты напрямую связан и с параметрами оболочки, геометрическими и волновыми, что явно показали экспериментальные исследования.

- Данные, полученные с помощью экспериментов, показывают снижение основной частоты колебаний оболочки, несущей присоединенную массу, сильнее, чем в соответствии с традиционными представлениями модели колебаний. Значительно существенней оказалось и расслоение частотного спектра.

- Ранее проведенные исследования зависимости малой присоединенной массы и собственных колебаний тонкой цилиндрической оболочки различного радиуса кривизны отсутствуют.

• Отсутствуют исследования о границах применимости математических моделей замкнутой и пологой разомкнутой оболочек для описания собственных колебаний разомкнутой оболочки, малой кривизны (разомкнутой цилиндрической оболочки) различного радиуса кривизны, несущей малую присоединенную массу и систему присоединенных масс.

• Явно недостаточное количество исследований влияния системы присоединенных масс на собственные колебания разомкнутых оболочек, несущих систему присоединенных масс.

Поэтому, мы полагаем, в перспективе необходимо решить следующие исследовательские задачи:

- для уточнения математической модели современной механики колебаний оболочки установить обстоятельства, приводящие к противоречиям в математической модели колебаний тонких разомкнутых оболочек, несущих малую присоединенную массу;
- найти новое решение колебаний разомкнутой цилиндрической оболочки, несущей малую присоединенную массу, при различных параметрах оболочки;
- выявить численные данные для установления всех параметров влияния присоединенной массы на колебания тонкой разомкнутой цилиндрической оболочки, несущей малую присоединенную массу.

Элементы конструкций в виде разомкнутых пологих оболочек широко используются в строительстве и машиностроении и имеют различные условия при опирании по краям, которые можно классифицировать как жесткие или шарнирные. Также на разомкнутых оболочках располагается различное оборудование, которое можно рассматривать как присоединенную массу. Разомкнутые оболочки подвержены процессам колебаний: они имеют спектр собственных форм частот и подвергаются внешним воздействиям, вызывающим вынужденные колебания. Совпадение частот собственных и вынужденных колебаний разомкнутой полой оболочки может привести к резкому увеличению амплитуды колебаний и как следствие – к разрушению элемента или всей конструкции, чего необходимо избежать [1]. Условия опирания разомкнутой полой оболочки и наличие на ней присоединенной массы могут оказать значительное влияние на процессы ее колебания и сроки эксплуатации. Поэтому при проектировании конструкций с элементами из разомкнутых пологих оболочек следует проводить расчеты конструкций на предмет их разрушения. Для этого нужно разработать расчетные модели, учитывающие наиболее значимые зависимости первого собственного числа задачи от параметра волнообразования для различных значений параметра длин участка закрепления – чему и посвящена настоящая статья. В качестве одного из способов расчета математической модели мы полагаем использовать РТВ (рекурсивную формулировку теории возмущений).

Определение численных характеристик колебаний

Исследуем частный случай колебаний разомкнутой полой оболочки, несущей малую присоединенную массу. Краевые параметры шарнирно опертой оболочки стоит отобразить как $(0.5k \leq x \leq 0.5k; 0.5 \leq y \leq 0.5)$ при $x = \pm 0.5k$, а на сторонах, имеющих различные краевые характеристики типа защемление–шарнир, $y = \pm 0.5$. Подробно рассмотрим описанную задачу (рис. 1).

Первичное дифференциальное уравнение опишем как [2–5]:

$$T''(t) + \theta^2 T = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^4 W - \lambda W - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где θ^2 – круговая частота собственных поперечных колебаний разомкнутой полой оболочки, $\lambda = \rho \theta^2 b^4 D^{-1}$ – собственная частотная характеристика колебаний.

Рис. 1. Схемы разомкнутой полой оболочки со смешанными граничными условиями;
 — шарнирное опирание, // — защемление.

Присоединим к нему граничные условия, включив в них параметр ε таким образом, чтобы при $\varepsilon = 0$ были бы реализованы граничные условия шарнирного опирания по краям $y = \pm 0.5$, а при $\varepsilon = 1$ – исходные граничные условия:

$$\begin{aligned} W &= 0, W_{xx} = 0 \text{ при } x = \pm 0.5, \\ W &= 0, W_{yy} = \bar{H}(x)\varepsilon(W_{yy} \pm W_y) \text{ при } y = \pm 0.5, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\bar{H}(x) = H(x - \mu k) + H(-x - \mu k)$, $H(x)$ – функция Хевисайда.

Для этого представим собственные числа и форму в виде Рекурсивной теории возмущений:

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \varepsilon^i, \lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \varepsilon^i. \quad (4)$$

Подстановка их в дифференциальное уравнение и граничные условия с последующим расщеплением по степеням ε приводит к рекуррентной последовательности краевых задач [6–9]:

$$\nabla^4 W_0 - \lambda_0 W_0 - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

$$W_0 = 0, W_{0xx} = 0 \text{ при } x = \pm 0.5k,$$

$$W_0 = 0, W_{0yy} = 0 \text{ при } y = \pm 0.5,$$

$$\nabla^4 W_j - \lambda_0 W_j - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^j \lambda_i W_{j-i}, \quad (6)$$

$$W_j = 0, W_{jxx} = 0 \text{ при } x = \pm 0.5k,$$

$$W_j = 0, W_{jxx} = \pm \bar{H}(x) \sum_{i=0}^{j-1} W_{iy} \text{ при } y = \pm 0.5. \quad (7)$$

Рассмотрим решение задачи для случая прямосимметричных относительно осей x и y форм собственных колебаний. В нулевом приближении имеем:

$$W_0 = X_0 Y_0 = \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y, \quad \lambda_0 = \pi^4 \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)^2, n, m = 1, 3, 5, \dots \quad (8)$$

В первом приближении получаем следующую краевую задачу:

$$\nabla^4 W_1 - \lambda_0 W_0 - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \lambda_1 W_0, \quad (9)$$

$$W_1 = 0, W_{1xx} = 0 \text{ при } x = \pm 0.5k,$$

$$W_1 = 0, W_{1yy} = \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \bar{H}(x) \cos \frac{\pi m}{k} x \text{ при } y = \pm 0.5.$$

Решение стоит искать в виде аппроксимации:

$$W_1 = \sum_{i=1,3,5,\dots} Y_{1i} \cos \frac{\pi i}{k} x. \quad (10)$$

Далее, решая математическую модель задачи (2), получим две краевые задачи:

$$\text{для } i = m: Y_{1m}^{IV} - 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} Y_{1m}^{II} - \pi^4 n^2 \left(2 \frac{m^2}{k^2} + n^2 \right) Y_{1m} = \lambda_1 \cos \pi n y,$$

$$Y_{1m} = 0, Y_{1m}^{II} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_{mm} \text{ при } y = \pm 0.5,$$

$$\text{для } i \neq m: Y_{1i}^{IV} - 2 \frac{\pi^2 i^2}{k^2} Y_{1i}^{II} - \pi^4 \left[\left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)^2 \frac{i^4}{k^4} \right] Y_{1i} = 0,$$

$$Y_{1i} = 0, Y_{1i}^{II} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_{im} \text{ при } y = \pm 0.5.$$

Здесь

$$\gamma_{im} = \begin{cases} 2(0.5 - \mu) - \frac{1}{\pi m} \sin 2\pi m \mu \text{ при } i = m; \\ \frac{4}{\pi(m^2 - i^2)} [i \sin \pi \mu i \cos \pi m \mu - m \sin \pi m \mu \cos \pi \mu i] \text{ при } i \neq m. \end{cases} \quad (11)$$

Устраняя неравномерность асимптотического разложения, определяем из краевой задачи первую поправку к собственному числу [10–14]:

$$\lambda_1 = 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm}.$$

После определения λ_1 строим Y_{1m} :

$$Y_{1m} = \frac{n}{\pi \alpha} \gamma_{mm} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_1} \operatorname{ch} \pi \beta_1 y - y \sin \pi n y \right], i = m,$$

$$\text{где } \alpha = n^1 + \frac{m^2}{k^2}; \beta_1 = \sqrt{2 \frac{m^2}{k^2} + n^2}.$$

Результаты решения задачи корректировок к собственной частоте колебаний не вносятся, но появляются дополнительные члены формы колебаний:

$$Y_{1i} = \frac{n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2\pi \left(\frac{i^2}{k^2} + n^2 \right)} \gamma_{im} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_{1i} y}{\operatorname{ch} \alpha_{1i}/2} - \frac{\left\{ \operatorname{ch} \gamma_{1i} y \right\}}{\left\{ \operatorname{ch} \gamma_{1i}/2 \right\}} \right], \begin{cases} i^2 > m^2 + n^2 k^2 \\ i^2 < m^2 + n^2 k^2 \end{cases}$$

где $\alpha_{1i} = \pi \sqrt{\frac{i^2 + m^2}{k^2} + n^2}$; $\beta_{1i} = \pi \sqrt{\frac{m^2 + i^2}{k^2} + n^2}$; $\gamma_{1i} = \pi \sqrt{\frac{m^2 - i^2}{k^2} - n^2}$.

Суммируя выражения, получаем первую поправку к собственной форме:

$$W_1 = \frac{n}{\pi \alpha} \left\{ \gamma_{mm} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_1} \operatorname{ch} \pi \beta_1 y - y \sin \pi n y \right] \cos \frac{\pi m}{k} x + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \gamma_{im} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_{1i} y}{\operatorname{ch} \alpha_{1i}/2} - \frac{\operatorname{ch} \gamma_{1i} y}{\operatorname{ch} \gamma_{1i}/2} \right] \right\} \cos \frac{\pi m}{k} x. \quad (12)$$

Здесь оператор $\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty}$ обозначает суммирование без члена с номером $i = m$.

Подобным образом находим выражение для следующей числовой корректировки собственного числа задачи:

$$\lambda_2 = 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm} \left\{ 1 - \frac{\gamma_{mm}}{\pi^2 \alpha} \left[\frac{\pi \beta_1}{2} \operatorname{th} \frac{\pi \beta_1}{2} + \frac{n^2}{\alpha} - \frac{3}{2} \right] - \frac{2n^2}{\alpha} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \gamma_{im} \left[\alpha_i \operatorname{th} \frac{\alpha_i}{2} + \left\{ \frac{-\varphi_{1i} \operatorname{th} \varphi_{1i}/2}{\beta_{1i} \operatorname{tg} \beta_{1i}/2} \right\} \right] \right\}.$$

РТВ [15–18] имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda &= \pi^4 \alpha^4 + 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm} \varepsilon + \left\{ 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm} \left(1 - \frac{\gamma_{mm}}{\pi^2 \alpha} \left[\frac{\pi \beta_1}{2} \operatorname{cth}^{(-1)^m} \frac{\pi \beta_1}{2} + \frac{n^2}{\alpha} - \frac{3}{2} \right] \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{2n^4}{\alpha} \sum_{\substack{i=1,3,5,\dots \\ i=2,4,6,\dots}} \gamma_{im}^2 \left[\alpha_i \operatorname{cth}^{(-1)^i} \frac{\alpha_i}{2} + \left\{ \frac{-\varphi_{1i} \operatorname{cth}^{(-1)^i} \varphi_{1i}/2}{\beta_{1i} \operatorname{ctg}^{(-1)^i} \beta_{1i}/2} \right\} \right] \right\} \varepsilon^2 + \dots, \\ W &= \left\{ \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y \right\} + \left[\frac{n}{\pi \alpha} \gamma_{mm} \left(\frac{\left\{ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \operatorname{ch} \pi \beta_1 y \right\}}{\left\{ \operatorname{ch} \pi \beta_1/2 \right\}} - \left\{ \sin \pi n y \right\} \right) \left\{ \cos \frac{\pi m}{k} x \right\} + \right. \\ &\quad \left. \frac{n \left\{ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \right\}}{2\pi \alpha} \sum_{\substack{i=1,3,5,\dots \\ i=2,4,6,\dots}} \gamma_{im} \left(\frac{\left\{ \operatorname{ch} \alpha_{1i} y \right\}}{\left\{ \operatorname{ch} \alpha_{1i}/2 \right\}} - \frac{\left\{ A_{1i} \right\}}{\left\{ B_{1i} \right\}} \right) \left\{ \cos \frac{\pi i}{k} x \right\} \right] \varepsilon + \dots, \quad \left. \begin{matrix} \{n, m = 1, 3, 5 \dots\} \\ \{n, m = 2, 4, 6 \dots\} \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\gamma_{im} = \begin{cases} 1 - 2\mu + \frac{(-1)^m}{\pi m} \sin 2\pi t \mu \text{ при } i = m \\ \frac{4}{\pi} * \frac{1}{(m^2 + i^2)} \left[\left\{ \begin{matrix} i \\ m \end{matrix} \right\} \sin \pi \mu i \cos \pi \mu m - \left\{ \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right\} \sin \pi \mu m \cos \pi \mu i \right] \text{ при } i \neq m; \end{cases}$$

$$\frac{\left\{ A_{1i} \right\}}{\left\{ A_{2i} \right\}} = \frac{\left\{ \operatorname{ch} \varphi_{1i} y \right\}}{\left\{ \operatorname{sh} \varphi_{1i} y \right\}} \text{ при } i^2 > m^2 + n^2 k^2;$$

$$\frac{\left\{ B_{1i} \right\}}{\left\{ B_{2i} \right\}} = \frac{\left\{ \operatorname{ch} \varphi_{1i}/2 \right\}}{\left\{ \operatorname{sh} \varphi_{1i}/2 \right\}}$$

$$\frac{\begin{Bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \end{Bmatrix}} = \frac{\begin{Bmatrix} \cos \beta_{1iy} \\ \sin \beta_{1iy} \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} \cos \beta_{1i}/2 \\ \sin \beta_{1i}/2 \end{Bmatrix}} \text{ при } i^2 < m^2 + n^2 k^2.$$

Подобным образом можно определить числовые характеристики при нахождении первого собственного числа колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с асимметричными локальными участками различных граничных условий (рис. 1). Выражения для собственных чисел [19] и формы сохраняются с заменой $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ на (-1) , $\begin{Bmatrix} \cos \pi m x/k \\ \sin \pi m x/k \end{Bmatrix}$ на $\sin \frac{\pi m}{k} x$, $\begin{Bmatrix} \cos \pi i x/k \\ \sin \pi i x/k \end{Bmatrix}$ на $\sin \frac{\pi i}{k} x$; $m=1,2,3,\dots$, $i=1,2,3,\dots$, а γ_{im} равно:

$$\gamma_{im} = \begin{cases} \mu - \frac{1}{2\pi m} \sin 2\pi m \mu & \text{при } i = m \\ \frac{2}{\pi} * \frac{1}{(m^2 + i^2)} [i \sin \pi \mu t \cos \pi \mu i - m \sin \pi \mu i \cos \pi \mu t] & \text{при } i \neq m. \end{cases} \quad (14)$$

Результаты и их обсуждение

Используя метод РТВ для определения первой частоты колебаний, перестраиваем аппроксимацию Паде и определяем частотную характеристику собственных колебаний при $\varepsilon = 1$. На рис. 2 сплошной линией показана корреляция собственной частоты от переменной μ для разомкнутой оболочки с зеркальным расположением локального заземления, а штриховой – не зеркальным. В граничном варианте (когда стороны при $y = \pm 0.5$ жестко закреплены) частотная характеристика колебаний равна $1.70 \pi^4$, нахождение с помощью аппроксимации Паде даёт тот же результат – $1.70 \pi^4$. Другой граничный случай (когда стороны $y = \pm 0.5$ абсолютно заземлены): первое число задачи равно $1.7050 \pi^4$, а с помощью метода аппроксимации Паде получаем характеристику, равную $1.7081 \pi^4$, расхождение – 0.18%. На рис. 2 штрихпунктирной линией отображены значения, вычисленные с помощью метода интегральных уравнений. Различия, как можно заметить, минимальны. То есть математическая модель, представленная в данной работе, позволяет учитывать воздействие способа закрепления и место закрепления на частотные характеристики колебаний разомкнутой оболочки, несущей малую присоединенную массу, при смешанных граничных условиях. На рис. 3 отображена корреляция собственной частотной характеристики колебаний и значения параметра волнообразования при изменении длин участков закрепления. Стоит обратить внимание на то, что воздействие варианта закрепления на основную собственную частотную характеристику можно выявить в основном при упругом характере креплений, наиболее приближенных по жесткости к предельным.

Рисунок 4 отображает подобие результатов расчетных данных при всех характеристиках длин участка закрепления. Результаты экспериментальных исследований (на рис. 4 отображены точками) соответствуют численным результатам, это подтверждает корректность выбора методов и способов проведения исследований. При длине участка заземления от 0 до 0,3 значительно увеличивается частота колебания. При длине заземления участка от 0.3 до 0.5 отсутствует влияние на значение собственного числового параметра частоты колебаний.

Вследствие этого разомкнутую пологую оболочку, имеющую граничные характеристики частичного заземления более, чем параметр $\mu = 0.3$, необходимо приравнять к жестко-заземленной, согласно $y = \pm 0.5$, к тому же отклонение в вычислении собственной частотной характеристики будет составлять менее 5%.

Рисунок 5 отображает корреляцию между собственной частотной характеристикой λ и значением ε при множестве μ . Стоит подчеркнуть, что воздействие на результаты расчетов закрепления граней разомкнутой полой оболочкой значительны при $\varepsilon > 0.7$.

Рис. 2. Влияние длины участков защемления на первое собственное число.

Рис. 3. Влияние жесткости заделки на первое собственное число.

Рис. 4. Сравнение теоретических и экспериментальных данных.

Рис. 5. Влияние длины участков защемления на первое собственное число.

Вывод

Полученная нами математическая модель хорошо описывает поведение разомкнутой полой оболочки со смешанными граничными условиями «защемление–шарнир» и малой присоединенной массой – с учетом изменения параметров волнообразования и длины участка закрепления. Полученные в ходе исследований результаты согласуются с экспериментальными данными. Малая присоединенная масса в значительной степени влияет на частотные характеристики колебаний пластины и является фактором, запускающим взаимодействие форм изгибных колебаний. Результаты полученных данных могут быть полезны для организаций, занимающихся проектированием конструкций, состоящих или имеющих включения в виде пластин и полых разомкнутых оболочек. Подобные конструкции можно встретить в различных сферах деятельности: в строительстве, авиации, энергетике, нефтяной и других отраслях промышленного производства.

Дальнейшие исследования будут проводиться в направлении выявления влияния системы присоединенных масс на частотные характеристики колебаний разомкнутых и замкнутых тонкостенных оболочек. Планируется проведение серий экспериментов на 20 образцах различных размеров и материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антуфьев Б.А. Колебания неоднородных тонкостенных конструкций: моногр. М.: Изд-во МАИ, 2011. 176 с.
2. Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А. Статическое и динамическое поведение полых оболочек под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий // Труды МАИ. 2015. Вып. 82. URL: http://mai.ru/upload/iblock/31c/belostochnyy_myeltsina-rus.pdf (дата обращения: 01.12.2019).

3. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
4. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. Вып. 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618> (дата обращения: 01.12.2019).
5. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наукова думка, 1984. 220 с.
6. Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Медведский А.Л. Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Труды МАИ. 2013. Вып. 71. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=46621> (дата обращения: 26.12.2013).
7. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии // Труды МАИ. 2015. Вып. 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58589> (дата обращения: 01.12.2019).
8. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн Сит Наинг. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. Вып. 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079> (дата обращения: 01.12.2019).
9. Chen M., Xie K., Jia W., Xu K. Free and forced vibration of ring-stiffened conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. *Ocean Engineering*, 2015(108):241–256. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Free-and-forced-vibration-of-ring-stiffened-shells-Chen-Xie/5f55eb184e19-1818-de96b8615a9462f7f107f265> – 01.12.2019.
10. Demin A.A., Golubeva T.N., Demina A.S. The program complex for research of fluctuations' ranges of plates and shells in magnetic field. 11th Students' Science Conference *Future Information technology solutions*. Bedlewo, 2013(6):61–66.
11. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Naing N.S. Nonlinear Oscillations of Elastic Curved Plate Carried to the Associated Masses System. International Conference on Construction, Architecture and Technology Safety (ICCATS 2017), 21–22 September 2017. Chelyabinsk, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 262(2017)012055. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/262/1/012055/pdf> – 01.12.2019.
12. Eliseev V.V., Moskalets A.A., Oborin E.A. One-dimensional models in turbine blades dynamics. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2016(9):93–104. URL: https://www.researchgate.net/profile/Vladimir_Eliseev2/publication/295507598_One_Dimensional_Models_in_Turbine_Blades_Dynamics/links/5dcb266492851c818049e803/One-Dimensional-Models-in-Turbine-Blades-Dynamics.pdf. – 01.12.2019.
13. Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models. *Berlin, Humboldt Univ.*, 2014(649):34. URL: <https://www.econstor.eu/handle/10419/91592> – 01.12.2019.
14. Laakso A., Romanoff J., Remes H. Free flexural vibration of symmetric beams with inertia induced cross section deformations, *Thin-Walled Structures*, 2017(119):1–12. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823116308618> – 01.12.2019.
15. Li H., Zhu M., Xu Z., Wang Z., Wen B. The influence on modal parameters of thin cylindrical shell under bolt looseness boundary. *Shock and Vibration*. 2016(2016):15–30. URL: <https://new.hindawi.com/journals/sv/2016/4709257/> <http://downloads.hindawi.com/journals/sv/2016/4709257.pdf> – 01.12.2019.
16. Mallon N.J., Fey H.B., Nijmeijer H.R. Dynamic stability of a base-excited thin orthotropic cylindrical shell with top mass: simulations and experiments. *J. of Sound and Vibration*. 2010(329):3149–3170. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Dynamic-stability-of-a-base-excited-thin-shell-with-Mallon-Fey/5df6fe3cbc7e12c894e8393ad5d4d543499ae10d> – 01.12.2019.
17. Qu Y., Hua H., Meng G. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries. *Composite Structures*. 2013(95):307–321. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/A-domain-decomposition-approach-for-vibration-of-Qu-Hua/eddfe89c4c1653944f7d97800d39ca5bc0dab8e> – 01.12.2019.
18. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Y., Baenhaev A.V. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell. *Materials Science Forum*, 2019(945):885–892. URL: <https://www.scientific.net/MSF.945.885> – 01.12.2019.
19. Xing Y., Liu B., Xu T. Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013(75):178–188.

DOI: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-1-2>

Sysoev O., Dobryshkin A.

OLEG SYSOEV, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Dean of the Faculty of *Cadastral and Construction*, ScopusID: 54080506700, e-mail: fks@knastu.ruARTEM DOBRYSHKIN, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Department Construction and Architecture, ScopusID: 57199398851, e-mail: wwwartem21@mail.ru*Institution of Higher Education Komsomolsk-on-Amur State University*

27 Lenin St., Komsomolsk-on-Amur, Russia, 681013

Natural vibrations of a shallow shell with mixed jamming-hinge boundary conditions and a small attached mass

Abstract: Open cylindrical shells are widely used in today's structures: for example, in construction, aviation, power generation, oil production and other industries. During operation, shell structures are affected by short-term cyclic effects which cause forced vibrations of structures and buildings resulting in activation of internal dynamic mechanisms. Such mechanisms modify own vibrations of structures, which significantly affects strength characteristics of the shell. Attached masses are often placed on such structures: such as aircraft engines, antenna installations, outboard fuel tanks, air conditioners, lights, and viewing platforms. The attached masses modify the stress-strain state and parameters of the shell's natural vibrations. This leads to changes in frequency and amplitude of vibrations of the structures, and causes a resonance phenomenon, which can destroy the structure. The new mathematical model has been developed by the authors of this Article to improve accuracy of shell vibration calculations. Application of this model allows to avoid the probable undesirable consequences such as negative deformations of buildings and structures, shells, equipment, mechanisms, etc. The mathematical model is developed on the basis of the general equation of plate oscillations — the Germain–Lagrange equation with an additional term, the physical meaning of which is the initial irregularity of the form due to a small attached mass. The mathematical model is calculated under the mixed *pinching–hinge* boundary conditions. Kirchhoff–Love hypotheses are accepted as assumptions. The mechanism of natural vibrations of an open shell with mixed *jamming–hinge* boundary conditions and an attached mass is analyzed. Using the recursive perturbation theory convertible into a Padé approximation, the frequency characteristics and the values of the first eigenvalue of the problem are determined for wave-forming parameter, which equals to 1. The behavior of an open shell with a small attached mass is considered using the method of integral equations. Dependences of influence of the length of the jamming sections on the first eigenvalue of frequencies of free vibrations are determined; dependences are calculated using the recursive perturbation theory, the Padé approximation, and the method of integral equations. All three curves provide almost identical results for all values of the parameter μ , which indicates high reliability of the developed mathematical model of oscillations of open thin-walled shells with a small attached mass. Results of studies described in the article can be useful for companies specialized in design of structures which consist of or have inclusions in the form of plates and sloping open shells.

Keywords: open shell, vibrations, attached mass, frequency spectrum, hinged description, frequency.

REFERENCES

1. Antufiev B.A. Oscillations of heterogeneous thin-walled structures: monograph. M., Publishing House of the Moscow Aviation Institute, 2011, 176 p.
2. Bialostochny G.N., Myltsina O.A. Static and dynamic behavior of gently sloping shells under the influence of rapidly varying temperature and force effects. Transactions of MAI. 2015;82. URL: http://mai.ru/upload/iblock/31c/belostochny_myltsina-rus.pdf – 12/01/2019.
3. Vlasov V.Z. General theory of shells and its application in technology. M.; L., Gostekhizdat, 1949, 784 p.
4. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Longitudinal and bending vibrations of a three-layer plate with compressible aggregate in contact with a layer of viscous fluid // Transactions of MAI. 2019;106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618> – 12/01/2019.
5. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Krasnopol'skaya T.S. Nonlinear interaction of the forms of bending vibrations of cylindrical shells. Kiev, Naukova Dumka, 1984, 220 p.
6. Kuznetsova E.L., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V., Medvedsky A.L. The impact of non-stationary distributed load on the surface of the elastic layer. Transactions of MAI. 2013;71. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=46621> – 12/26/2013.
7. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I., Klyshnikov K.Yu., Ovcharenko E.A. Numerical and experimental study of the deformation and stability of a cylindrical shell of a cellular structure under axial compression. Transactions of MAI. 2015;82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58589> – 12/01/2019.
8. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nane Sit Ning. Analytical and experimental study of free oscillations of open shells of alloy D19 carrying a system of attached masses. Transactions of MAI. 2018;98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079> – 12/01/2019.
9. Chen M., Xie K., Jia W., Xu K. Free and forced vibration of ring-stiffened conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. Ocean Engineering, 2015(108):241–256. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Free-and-forced-vibration-of-ring-stiffened-shells-Chen-Xie/5f55eb184e19-1818-de96b8615a9462f7f107f265> – 01.12.2019.
10. Demin A.A., Golubeva T.N., Demina A.S. The program complex for research of fluctuations' ranges of plates and shells in magnetic field. 11th Students' Science Conference *Future Information technology solutions*. Bedlewo, 2013(6):61–66.
11. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Naing N.S. Nonlinear Oscillations of Elastic Curved Plate Carried to the Associated Masses System. International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety (ICCATS 2017), 21–22 September 2017. Chelyabinsk, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 262(2017)012055. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/262/1/012055/pdf> – 01.12.2019.
12. Eliseev V.V., Moskalets A.A., Oborin E.A. One-dimensional models in turbine blades dynamics. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2016(9):93–104. DOI: 10.1007/978-3-319-29579-4_10
13. Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models. Berlin, Humboldt Univ., 2014(649):34. URL: <https://www.econstor.eu/handle/10419/91592> – 01.12.2019.
14. Laakso A., Romanoff J., Remes H. Free flexural vibration of symmetric beams with inertia induced cross section deformations, Thin-Walled Structures, 2017(119):1–12. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823116308618> – 01.12.2019.
15. Li H., Zhu M., Xu Z., Wang Z., Wen B. The influence on modal parameters of thin cylindrical shell under bolt looseness boundary. Shock and Vibration. 2016(2016):15–30. URL: <https://new.hindawi.com/journals/sv/2016/4709257/> – 01.12.2019.
16. Mallon N.J., Fey H.B., Nijmeijer H.R. Dynamic stability of a base-excited thin orthotropic cylindrical shell with top mass: simulations and experiments. J. of Sound and Vibration. 2010(329): 3149–3170. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Dynamic-stability-of-a-base-excited-thin-shell-with-Mallon-Fey/5df6fe3cbc7e12c894e8393ad5d4d543499ae10d> – 01.12.2019.
17. Qu Y., Hua H., Meng G. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries. Composite Structures. 2013(95):307–321. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/A-domain-decomposition-approach-for-vibration-of-Qu-Hua/eddfe89c4c1653944f7d97800d39ca5bc0dab8e> – 01.12.2019.
18. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Y., Baenshaev A.V. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell. Materials Science Forum, 2019(945):885–892. URL: <https://www.scientific.net/MSF.945.885> – 01.12.2019.
19. Xing Y., Liu B., Xu T. Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions. International Journal of Mechanical Sciences, 2013(75):178–188.