Механика деформируемого твердого тела

DOI: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-2-1>
УДК 539.37;514

М.А. Гузев, А.В. Горбунов

ГУЗЕВ МИХАИЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ – академик РАН, д.ф.-м.н., директор, SPIN: 9935-0761, ScopusID: 55976318100, e-mail: guzev@iam.dvo.ru
ГОРБУНОВ АНТОН ВЯЧЕСЛАВОВИЧ – работник лаборатории вычислительной информатики (студент Школы естественных наук ДВФУ), e-mail: gorbunov.avia@students.dvfu.ru
Институт прикладной математики ДВО РАН
Владивосток, Россия

Неевклидова модель сплошной среды и описание остаточных напряжений

Аннотация: В рамках неевклидовой модели сплошной среды, для которой условие совместности Сен-Венана для деформаций не выполняется, получено уравнение для функции напряжений. Построено представление для поля внутренних напряжений и показано, что оно складывается из классического поля упругих напряжений и поля напряжений, параметризованного через функцию несовместности. Неевклидова модель континуума применяется для описания внутренних остаточных напряжений в образцах. Феноменологические параметры модели определены на основе данных эксперимента по измерению остаточных напряжений.

Ключевые слова: самоуравновешенные напряжения, остаточное напряжение, несовместность, неевклидова модель, плоскодеформированное состояние.

Введение

В классической теории упругости хорошо известно, что при механическом равновесии твердого тела в отсутствие объемных сил и нагрузки на границе тела полагают компоненты напряжений равными нулю всюду – и внутри тела, и на его поверхности. В то же время в инженерных конструкциях существуют внутренние самоуравновешенные (остаточные) напряжения, не исчезающие при снятии внешних нагрузок. По определению [8, 16], поле напряжений внутри тела обладает свойством самоуравновешенности, если суммарная сила и момент, действующие на тело, равны нулю. Примером могут служить сварные швы [1, 3]. В технике используются различные технологические приемы, позволяющие уменьшить уровень внутренних напряжений или, наоборот, повысить их. В качестве таковых можно указать различные виды термической и механической обработки материалов [1].

В механических теориях [1] вычисление остаточных напряжений в теле основано на принципах классической механики сплошной среды. Если в теле выполнить разрез и освободить поверхность сечения, то равновесие тела не изменится после приложения к поверхности напряжения, равного остаточному, но имеющего противоположный знак. Тогда, зная приложенные к поверхности сечения внешние напряжения, равные по величине остаточным, которые существовали на этой поверхности до сечения, и противоположные по знаку, можем определить последние. Такие остаточные напряжения относят к макронапряжениям, по-

скольку в пределах размера зерна материала они изменяются несущественно. В частности, напряжение, возникающее от внешних нагрузок, относится к микронапряжению. Экспериментальное изучение [1, 3] показывает, что остаточные напряжения могут иметь значения, сравнимые с напряжениями, возникающими при внешних воздействиях.

Остаточные микронапряжения претерпевают изменения в пределах зерна кристаллической структуры. Изучение микрохарактеристик различных материалов физическими методами обусловили введение в материаловедческую литературу таких понятий, как дислокации, дисклинации, вакансии и другие характеристики дефектов кристаллического строения [6]. Как правило, изменение остаточных микронапряжений при воздействии технологических приемов на материал связывают с перераспределением или исчезновением дефектов внутренней структуры материала. В физических теориях прочности и пластичности рассмотрены различные модели дефектов кристаллической структуры материалов, приводящие к отличным от нуля значениям напряжений в условиях равновесия (см., например, [2, гл. IV]).

Попытка описать самоуравновешенные микронапряжения привела исследователей к необходимости введения в теоретические модели описания физико-механических свойств материалов дополнительных характеристик их внутренней структуры, в том числе скалярных и тензорных характеристик «поврежденности», «дефектности» и т.п. С точки зрения классической механики сплошной среды и неравновесной термодинамики введенные различными учеными характеристики для описания внутренней структуры материалов явно требовали расширения кинематических оснований теории. Это привело исследователей к выводу о необходимости использовать при их описании неевклидовы геометрические объекты, математические объекты, не укладывающиеся в рамки евклидова геометрического описания деформационных свойств упругой сплошной среды [4, 11, 14, 17].

Неевклидова модель сплошной среды использовалась при анализе различных эффектов механизма зонального поведения горных пород [5, 10, 18]. Примеры проявления другими материалами неевклидовых свойств представлены в работах [12, 15].

Цель данной статьи – применение решений неевклидовой модели для описания остаточных напряжений в материале. В начале работы рассматривается неевклидова модель сплошной среды для плоскодеформированного состояния материала в равновесии. Переход от классической теории упругости к неевклидовой модели сплошной среды соответствует отказу от условия совместности Сен-Венана [7] и введению в модель дополнительного параметра: функции несовместности [14, 17]. С математической точки зрения невыполнение условия совместности Сен-Венана означает [7], что внутренняя геометрия материала не совпадает с евклидовой геометрией пространства наблюдателя. Для плоскодеформированного состояния среды эта функция несовместности является скалярной, т.е. неевклидова модель имеет единственный по сравнению с классической моделью дополнительный параметр – это отличает двумерный случай от трехмерного случая. Чтобы удовлетворить уравнению равновесия, введена функция напряжений неевклидовой модели и показано, что она удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению, правая часть которого совпадает с функцией несовместности. Показано, что функция напряжения неевклидовой модели представлена через классическую функцию напряжения и функцию несовместности, и поле напряжений складывается из классического поля упругих напряжений и неевклидова поля напряжений, определяемого через функцию несовместности. Как приложение полученных результатов построено решение для функции несовместности в декартовой системе координат и получено представление для продольных и поперечных напряжений. Теоретические результаты работы используются для анализа экспериментальных данных [13] и выбора феноменологических параметров неевклидовой модели.

Переход от классической модели к неевклидовой модели

Уравнения механического равновесия для плоскодеформированного состояния имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Пусть реологическое соотношение между компонентами поля напряжений и деформаций является линейным (закон Гука):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

где λ, μ – феноменологические параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера. Рассматривая кинематические возможности выбора модели сплошной среды, введем функцию R , полагая

$$\frac{R}{2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}. \quad (3)$$

В классической теории упругости предполагается [7], что справедливо условие совместности Сен-Венана для деформаций: $R = 0$. Данное условие является необходимым и достаточным для представления тензора ε_{ij} через компоненты u^i вектора смещения в виде $2\varepsilon_{ij} = \partial u_i / \partial x^j + \partial u_j / \partial x^i$, т.е. ε_{ij} порождаются полем смещений u_i .

Системе (1) можно тождественно удовлетворить, если ввести функцию напряжений Φ согласно формулам:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2 \partial x^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^1 \partial x^1}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^1 \partial x^2}. \quad (4)$$

Получение уравнения для функции Φ основано на использовании условия (3). Выразим компоненты ε_{ij} из соотношений (2):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda \sigma}{3\lambda + 2\mu} \right], \quad \sigma = \sigma_{kk}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), получаем уравнение для функции напряжений:

$$\Delta^2 \Phi = \frac{\mu}{1-\nu} R, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (6)$$

где Δ – оператор Лапласа. Поскольку в классической теории упругости $R = 0$, то из (6) получаем уравнение для функции напряжений Эйри Φ_{clas} :

$$\Delta^2 \Phi_{clas} = 0. \quad (7)$$

Сравнение (7) с (6) показывает, что переход от классической модели к неевклидовой приводит к неоднородному бигармоническому уравнению для функции напряжения.

Поле напряжений

Уравнение (6) является линейным, тогда его решение Φ можно представить в виде суммы классической функции напряжений Φ_{clas} и дополнительного вклада $\Phi_{non-Eucl}$:

$$\Phi = \Phi_{clas} + \Phi_{non-Eucl}. \quad (8)$$

Выполняя перенормировку для R в (6), т.е. полагая $\frac{\mu}{1-\nu}R \rightarrow R$, перепишем (6) в виде

$$\Delta^2 \Phi_{non-Eucl} = R. \quad (9)$$

Функция R является неизвестной в общем случае. Этот геометрический объект был использован для описания самоуравновешенных напряжений [16], при анализе явления зональной дезинтеграции [10], а также в моделях сплошных сред с внутренней структурой [9]. В этих работах показано, что в предположении квадратичной зависимости внутренней энергии среды от термодинамических переменных уравнение для R имеет следующий вид:

$$\Delta^2 R = \gamma R, \quad \gamma \neq 0. \quad (10)$$

Физический смысл параметра γ зависит от выбора конкретной задачи.

Из (9), (10) следует

$$\Delta^2 \left(\Phi_{non-Eucl} - \frac{R}{\gamma} \right) = 0. \quad (11)$$

Поскольку решения однородного бигармонического уравнения мы отнесли к функции Φ_{clas} (7), то решение уравнения (11) тривиально, и для функции напряжений неевклидовой модели получаем следующее представление:

$$\Phi_{non-Eucl} = \frac{R}{\gamma}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (8) и используя (4), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 (\Phi_{clas} + \Phi_{non-Eucl})}{\partial x^2 \partial x^2} = \sigma_{11,clas} + \sigma_{11,non-Eucl}, \quad \sigma_{11,non-Eucl} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2 \partial x^2}, \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 (\Phi_{clas} + \Phi_{non-Eucl})}{\partial x^1 \partial x^1} = \sigma_{22,clas} + \sigma_{22,non-Eucl}, \quad \sigma_{22,non-Eucl} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 R}{\partial x^1 \partial x^1}, \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 (\Phi_{clas} + \Phi_{non-Eucl})}{\partial x^1 \partial x^2} = \sigma_{12,clas} + \sigma_{12,non-Eucl}, \quad \sigma_{12,non-Eucl} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 R}{\partial x^1 \partial x^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда видно, что структура поля внутренних напряжений складывается из классического поля упругих напряжений и поля напряжений, параметризованного через функцию несовместности R . Нетрудно показать, что соотношения (13) определяют поля самоуравновешенных напряжений, т.е. они удовлетворяют интегральным условиям равновесия

$$\int_{\partial S} \sigma_{ij} n_j dl = 0, \quad M_{ik} = \int_{\partial S} (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) n_l dl = 0, \quad (14)$$

S – область, занятая телом; ∂S – граница (некоторая кривая) этой области. С физической точки зрения первое условие в (14) означает, что сила, действующая на выделенную область, может быть представлена в виде суммы сил, действующих на каждый элемент границы области поверхности, и она равна нулю. Второе условие в (14) соответствует обращению в нуль суммарного момента M_{ij} сил внутренних напряжений. Доказательство для трехмерного случая самоуравновешенных свойств полей напряжений представлено в [8, 16] (в [16] рассматривается также случай несимметричного поля напряжений).

Описание остаточных напряжений

Для иллюстрации возможностей полученных формул при моделировании самоуравновешенных полей напряжений рассмотрим их применение при анализе остаточных напряжений в металлических образцах. Авторы [13] использовали прямоугольные образцы длиной 100 mm (по координате x^1) и шириной 20 mm (по координате x^2), у которых продольные концы были закрутлены с радиусом $\sim 10\text{ mm}$. Исследователи выполнили измерения продольного остаточного (longitudinal residual) и поперечного остаточного (transverse residual) напряжений на центральной линии $x^2 = 0$ – в зависимости от переменной x^1 . На рисунке (ниже) представлены результаты [13, fig. 4]: квадратные точки соответствуют продольному, а круглые точки – поперечному напряжениям. В соответствии с целью данной статьи используем общее решение (13) неевклидовой модели для описания остаточных напряжений данного образца и укажем алгоритм восстановления феноменологических параметров модели.

Результаты для продольного и поперечного остаточного напряжения [13, fig. 4] и их аппроксимация с помощью аналитических формул, которую выполнили авторы настоящей статьи.

Соотношения (13) содержат неизвестную функцию R . Представим ее в виде $R = R_+ + R_-$, где R_+ , R_- удовлетворяют уравнениям

$$(\Delta + \sqrt{\gamma})R_+ = 0, (\Delta - \sqrt{\gamma})R_- = 0. \quad (15)$$

В случае $\gamma > 0$ получаем классическое уравнение Гельмгольца для R_+ , где параметр $\sqrt{\gamma}$ имеет смысл волнового числа. Если $\gamma < 0$, то имеем уравнение Гельмгольца с мнимым значением волнового числа. В декартовых координатах построение решения уравнений (15) можно выполнить с помощью метода разделения переменных. Тогда, полагая

$$R_+ = R_{+,1}R_{+,2}, R_{+,1} = R_{+,1}(x^1)R_{+,2} = R_{+,2}(x^2); R_- = R_{-,1}R_{-,2}, R_{-,1} = R_{-,1}(x^1)R_{-,2} = R_{-,2}(x^2),$$

получаем из (15)

$$\frac{R''_{+,1}}{R_{+,1}} + \frac{R''_{+,2}}{R_{+,2}} + \sqrt{\gamma} = 0, \frac{R''_{-,1}}{R_{-,1}} + \frac{R''_{-,2}}{R_{-,2}} - \sqrt{\gamma} = 0, \quad (16)$$

где два штриха обозначают дифференцирование по соответствующему аргументу функции. Вводя постоянные разделения

$$\omega_1^2 = -\frac{R''_{+,1}}{R_{+,1}}, \omega_2^2 = -\frac{R''_{+,2}}{R_{+,2}}, \Omega_1^2 = -\frac{R''_{-,1}}{R_{-,1}}, \Omega_2^2 = -\frac{R''_{-,2}}{R_{-,2}},$$

запишем (16) в виде

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \sqrt{\gamma}, \quad \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = -\sqrt{\gamma}. \quad (17)$$

Дальнейшая конкретизация полученных соотношений основана на использовании дополнительных упрощений. Поскольку второе условие в (17) следует из первого при замене $\omega_1 \rightarrow i\Omega_1, \omega_2 \rightarrow i\Omega_2$, где i – мнимая единица, то достаточно рассмотреть решение для R_+ , полагая $R_- = 0$. Представим R_+ в виде $R_+ = a\gamma \cos \omega_1 x^1 \cos \omega_2 x^2$. Отсюда и из (12) получаем $\Phi_{non-Eucl} = a \cos \omega_1 x^1 \cos \omega_2 x^2$ и компоненты напряжений (13):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11,clas} - a\omega_2^2 \cos \omega_1 x^1 \cos \omega_2 x^2, \sigma_{22} = \sigma_{22,clas} - a\omega_1^2 \cos \omega_1 x^1 \cos \omega_2 x^2, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12,clas} - a\omega_1 \omega_2 \sin \omega_1 x^1 \sin \omega_2 x^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) следует, что на оси $x^2 = 0$ компоненты исследуемых напряжений даются соотношениями:

$$\sigma_{11}(x^1) = \sigma_{11,clas} - a[\sqrt{\gamma} - \omega_1^2] \cos \omega_1 x^1, \quad \sigma_{22}(x^1) = \sigma_{22,clas} - a\omega_1^2 \cos \omega_1 x^1, \quad (19)$$

при записи которых мы воспользовались первым условием в (17). Параметры $\sigma_{11,clas}, \sigma_{22,clas}, \omega_1, a, \gamma$ следует определить на основе данных эксперимента. В соответствии с результатами эксперимента известны значения σ_{11}, σ_{22} в дискретном наборе точек $x_i^1 = x_0 + T(i-1), 1 \leq i \leq n$. В то же время величины $\sigma_{11}(x^1), \sigma_{22}(x^1)$ параметризуются с помощью (19), тогда, используя процедуру усреднения по x_i^1 , можно определить $\sigma_{11,clas}, \sigma_{22,clas}$. В частности, полагая

$$\sum_{i=1}^n \cos \omega_1 x_i^1 = \sum_{i=1}^n \cos \omega_1 (x_0 + T(i-1)) = 0, \quad (20)$$

получаем

$$\sigma_{11,clas} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{11}(x_i^1)}{n}, \quad \sigma_{22,clas} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{22}(x_i^1)}{n}.$$

Для приведенного выше рисунка значение $n = 8$, тогда

$$\sigma_{11,clas} = 189 \text{ MPa}, \quad \sigma_{22,clas} = 15 \text{ MPa}.$$

Сформулированное условие (20) ограничивает выбор параметра ω_1 . Чтобы в этом убедиться, выполним суммирование в (20). Поскольку

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 [x_0 + T(i-1)] &= \cos \omega_1 x_0 \cos \omega_1 T(i-1) - \sin \omega_1 x_0 \sin \omega_1 T(i-1), \\ \sum_{k=0}^n \cos kx &= \cos \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}, \quad \sum_{k=1}^n \sin kx = \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

то

$$\sum_{i=1}^n \cos \omega_1 T(i-1) = \cos \frac{(n-1)\omega_1 T}{2} \frac{\sin \frac{n\omega_1 T}{2}}{\sin \frac{\omega_1 T}{2}}, \quad \sum_{i=1}^n \sin \omega_1 T(i-1) = \sin \frac{(n-1)\omega_1 T}{2} \frac{\sin \frac{n\omega_1 T}{2}}{\sin \frac{\omega_1 T}{2}}.$$

Комбинирование полученных соотношений дает

$$\sum_{i=1}^n \cos \omega_1 x_i^1 = \frac{\sin \frac{n\omega_1 T}{2}}{\sin \frac{\omega_1 T}{2}} \cos \left(\omega_1 x_0 + \frac{(n-1)\omega_1 T}{2} \right).$$

Отсюда и из (20) получаем, что ω_1 параметризуется следующим образом:

$$\frac{n\omega_1 T}{2} = \pi N \text{ или } \omega_1 x_0 + \frac{(n-1)\omega_1 T}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi M,$$

N, M – целые неотрицательные числа. В соответствии с рисунком

$n = 8, T = 5 \text{ mm}, x_0 = 2.5 \text{ mm}$, и получаем две серии наборов для ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{\pi N}{20} (1/\text{mm}), \omega_1 = \frac{\pi}{20} \left(M + \frac{1}{2} \right) (1/\text{mm}). \quad (21)$$

Соответствующий период равен $T = 2\pi / \omega_1$, тогда, подставляя сюда (21), получаем

$$T = \frac{40}{N} (\text{mm}) \text{ или } T = \frac{40}{M + \frac{1}{2}} (\text{mm}). \quad (22)$$

Из расположения точек (см. рисунок) видно, что длина периода лежит между 20 mm и 25 mm . Прямым вычислением легко убедиться, что $N = 2$ дает единственное такое значение периода в (22). Таким образом, окончательно получим

$$\omega_1 = \frac{\pi}{10} (1/\text{mm}). \quad (23)$$

Для определения a, γ воспользуемся экспериментальными данными о величине напряжений в центре образца. Пусть $\sigma_{1,0} = \sigma_{11}|_{x^1 \rightarrow 0}$ – продольное напряжение и $\sigma_{2,0} = \sigma_{22}|_{x^1 \rightarrow 0}$ – поперечное напряжение в центре образца. Мы полагаем, что они удовлетворяют (19):

$$\sigma_{1,0} = \sigma_{11}|_{x^1 \rightarrow 0} = \sigma_{11,clas} - a \left[\sqrt{\gamma} - \omega_1^2 \right], \quad \sigma_{2,0} = \sigma_{22}|_{x^1 \rightarrow 0} = \sigma_{22,clas} - a\omega_1^2. \quad (24)$$

Последнее соотношение позволяет найти

$$a = \frac{\sigma_{22,clas} - \sigma_{2,0}}{\omega_1^2}.$$

Для исследуемого эксперимента получаем $a = 861 \text{ MPa} \cdot (\text{mm})^2$. Заметим, что произведение $\text{MPa} \cdot (\text{mm})^2$ имеет размерность силы. Подставляя полученное значение a в первое условие (24), определяем $\sqrt{\gamma} = 0.198 (1/\text{mm}^2)$.

Графики для напряжений, построенные в соответствии с формулой (19) с использованием значений полученных параметров, представлены на рисунке: непрерывная линия соответствует продольному напряжению, а штриховая – касательному.

Заключение

В данной работе использование неевклидовой модели для описания остаточных напряжений в материале привело к решению важной задачи для плоскодеформированного состояния материала в равновесии, связанной с построением функции напряжений при невыполнении условия совместности Сен-Венана. Показано, что функция напряжений в неевклидовой модели является суммой классической функции напряжения и дополнительного

вклада, определяемого через функцию несовместности. В работе параметризация функции несовместности дана через решения уравнения Гельмгольца, для которого применительно к исследуемому образцу материала получено представление в декартовой системе координат. Определение феноменологических параметров предложенной модели выполнено на основе использования экспериментальных данных для продольного и поперечного напряжений образцов металла, подвергнутого лазерной обработке. Хорошее качественное совпадение аналитических результатов с экспериментальными, представленное на рисунке, придает оптимизм для дальнейшего применения предложенного теоретического подхода. Задача, которая является естественным продолжением исследования данной работы, связана с изучением распределения напряжения по высоте образца. Для этого случая авторы [13] также представили экспериментальные данные, однако сравнение с ними результатов моделирования потребует анализа полной системы уравнений равновесия сплошной среды в отличие от использованных уравнений (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биргер И.А. Остаточные напряжения: монография. М.: Гос. науч.-техн. изд-во машиностроит. лит-ры, 1963. 233 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. 7. Теория упругости. М.: Физматлит, 2003. 264 с.
3. Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Пономарев И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. М.: Наука, 1996. 240 с.
4. Bilby B.A., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Reimannian geometry. *Proc. Roy. Soc. A*, 1955, vol. 231, p. 263–273. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>
5. Dorovsky V., Romensky E., Sinev A. Spatially non-local model of inelastic deformations: applications for rock failure problem. *Geophysical Prospecting*. 2015;63(5):1198–1212. DOI: <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12230>
6. George C. Sih, Xue Song Tang. Screw dislocations generated from crack tip of self-consistent and self-equilibrated systems of residual stresses: Atomic, meso and micro. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2005;43(3):261–307. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2005.03.001>
7. Godunov S.K., Romensky E. *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws*. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2003.
8. Gurtin M.E. A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1963;3(1):321–329.
9. Guzev M.A. Structure of kinematic and force fields in the Riemannian continuum model. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2011;52(5):709–716. DOI: <https://doi.org/10.1134/S002189441105004X>
10. Guzev M.A., Paroshin A.A. Non-Euclidean model of the zonal disintegration of rocks around an underground working. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2001;42(1):131–139. DOI: <https://doi.org/10.1023/-A:1018877015940>
11. Kazuo Kondo. On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding. *Proc. Japan. Nat. Congr. Appl. Mech.* 1952(2):41–47.
12. Klein Y., Efrati E., Sharon E. Shaping of Elastic Sheets by Prescription of non-Euclidean Metrics. *Science*. 2007;315(5815):1116–1120. URL: <https://doi.org/10.1126/science.1135994> – 02.04.2020.
13. Kromm A., Cabeza S., Mishurova T., Nadammal N., Thiede T., Bruno G. Residual Stresses in Selective Laser Melted Samples of a Nickel Based Superalloy: *Materials Research Proceedings*. 2018, vol. 6, p. 259–264. DOI: <http://dx.doi.org/10.21741/9781945291890-41>
14. Kröner E. Incompatibility, defects, and stress functions in the mechanics of generalized continua. *International J. of Solids and Structures*. 1985;21(7):747–756.

- DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(85\)90077-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(85)90077-0)
15. Lewicka M., Pakzad M. Scaling laws for non-Euclidean plates and the $W^{2,2}$ isometric immersions of Riemannian metrics. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. 2010;17(4):1158–1173. DOI: <https://doi.org/10.1051/cocv/2010039>
 16. Myasnikov V.P., Guzev M.A., Ushakov A.A. Self Equilibrated Stress Fields in a Continuous Medium. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2004;45(4):558–564. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:JAMT.0000030334.-32046.e6>
 17. Stojanovic R. Equilibrium conditions for internal stresses in non-euclidean continua and stress spaces. *Int. J. Engng. Sci.* 1963;1:323–327. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90010-7](https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90010-7)
 18. Xiaoping Pinga Zhou, Han Fei Song, Qi Hu Qian. Zonal disintegration of deep crack-weakened rock masses: A non-Euclidean model. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2011;55(3):226–236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2011.07.007>

FEFU: SCHOOL of ENGINEERING BULLETIN. 2020. N 2/43

Mechanics of Deformable Solids

www.dvfu.ru/en/vestnikis

DOI: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-2-1>

Guzev M., Gorbunov A.

MIKHAIL GUZEV, Academician of RAS, Professor, Director, e-mail: guzev@iam.dvo.ru
 ANTON GORBUNOV, Employee of the Laboratory of Computational Informatics (Student, School of Natural Sciences, Far Eastern Federal University),
 e-mail: gorbunov.avia@students.dvfu.ru
Institute of Applied Mathematics, FEB RAS
 Vladivostok, Russia

Non-Euclidean model of a continuous medium and description of residual stresses

Abstract: Within the framework of the non-Euclidean model of a continuous medium for which the Saint-Venant compatibility condition for deformations is not fulfilled, an equation for the stress function is obtained. A representation is built for the field of internal stresses and it is shown to consist of the classic field of elastic stresses and the stress field parameterized through the incompatibility function. The non-Euclidean continuum model is used to describe the internal residual stresses in the samples. The phenomenological parameters of the model are determined on the basis of experimental data on the measurement of residual stresses.

Keywords: self-balanced stresses, residual stress, incompatibility, non-Euclidean model, plane-deformed state.

REFERENCES

1. Birger I.A. Residual stresses: monography. M., State Scientific and Technical Publishing House of Engineering Literature, 1963, 233 p.
2. Landau L.D., Lifshits E.M. Theoretical physics: in 10 vol., vol. 7. Theory of elasticity. M., Fizmatlit. 2003, 264 p.
3. Chernyshev G.N., Popov A.L., Kozintsev V.M., Ponomarev I.I. Residual stresses in deformable solids. Moscow, Nauka, 1996, 240 p.
4. Bilby B.A., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Reimannian geometry. *Proc. Roy. Soc. A*, 1955, vol. 231, p. 263–273. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>
5. Dorovsky V., Romensky E., Sinev A. Spatially non-local model of inelastic deformations: applica-

- tions for rock failure problem. *Geophysical Prospecting*. 2015;63(5):1198–1212.
DOI: <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12230>
6. George C. Sih, Xue Song Tang. Screw dislocations generated from crack tip of self-consistent and self-equilibrated systems of residual stresses: Atomic, meso and micro. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2005;43(3):261–307. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2005.03.001>
7. Godunov S.K., Romensky E. *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.
8. Gurtin M.E. A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1963;3(1):321–329.
9. Guzev M.A. Structure of kinematic and force fields in the Riemannian continuum model. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2011;52(5):709–716. DOI: <https://doi.org/10.1134/S002189441105004X>
10. Guzev M.A., Paroshin A.A. Non-Euclidean model of the zonal disintegration of rocks around an underground working. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2001;42(1):131–139.
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1018877015940>
11. Kazuo Kondo. On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding. *Proc. Japan. Nat. Congr. Appl. Mech.* 1952(2):41–47.
12. Klein Y., Efrati E., Sharon E. Shaping of Elastic Sheets by Prescription of non-Euclidean Metrics. *Science*. 2007;315(5815):1116–1120. URL: <https://doi.org/10.1126/science.1135994> – 02.04.2020.
13. Kromm A., Cabeza S., Mishurova T., Nadammal N., Thiede T., Bruno G. Residual Stresses in Selective Laser Melted Samples of a Nickel Based Superalloy: *Materials Research Proceedings*. 2018, vol. 6, p. 259–264. DOI: <http://dx.doi.org/10.21741/9781945291890-41>
14. Kröner E. Incompatibility, defects, and stress functions in the mechanics of generalized continua. *International J. of Solids and Structures*. 1985;21(7):747–756.
DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(85\)90077-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(85)90077-0)
15. Lewicka M., Pakzad M. Scaling laws for non-Euclidean plates and the $W^{2,2}$ isometric immersions of Riemannian metrics. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. 2010;17(4):1158–1173. DOI: <https://doi.org/10.1051/cocv/2010039>
16. Myasnikov V.P., Guzev M.A., Ushakov A.A. Self Equilibrated Stress Fields in a Continuous Medium. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2004;45(4):558–564. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:AMT.0000030334.32046.e6>
17. Stojanovic R. Equilibrium conditions for internal stresses in non-euclidean continua and stress spaces. *Int. J. Engng. Sci.* 1963;1:323–327. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90010-7](https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90010-7)
18. Xiaoping Pinga Zhou, Han Fei Song, Qi Hu Qian. Zonal disintegration of deep crack-weakened rock masses: A non-Euclidean model. *Theoretical and Applied*.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2011.07.007>