Механика деформируемого твердого тела

DOI: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2019-4-2>
УДК 539.374

А.Н. Прокудин, С.В. Фирсов

ПРОКУДИН АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ – к.т.н., ведущий научный сотрудник,
AuthorID: 415431, SPIN: 6812-2451, ORCID: 0000-0002-5156-424X,
ResearcherID: N-9344-2016, ScopusID: 35722777500, e-mail: sunbeam_85@mail.ru
ФИРСОВ СЕРГЕЙ ВИКТОРОВИЧ – младший научный сотрудник,
AuthorID: 783315, SPIN: 8267-2329, ORCID: 0000-0001-7446-6231,
ResearcherID: D-1966-2018, ScopusID: 56976208300, e-mail: firsov.s.new@yandex.ru
Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН
Металлургов ул., 1, Комсомольск-на-Амуре, Россия, 681005

Упругопластическое деформирование вращающегося полого цилиндра с жестким покрытием на внутренней и внешней стенках

Аннотация: Рассматривается полый цилиндр из идеального изотропного упругопластического материала в условиях плоской деформации с ограничениями по радиальному перемещению на внутренней и внешней поверхностях. Предполагается, что полные деформации в цилиндре являются малыми и складываются из упругих и пластических деформаций. Напряжения и упругие деформации связаны законом Гука, пластические деформации определяются условием Треска и ассоциированным с ним законом пластического течения. Деформирование цилиндра происходит за счет центробежных сил, возникающих при вращении цилиндра с угловой скоростью, которая сначала увеличивается до выбранного максимального значения, а затем уменьшается вплоть до полной остановки цилиндра. Предполагается, что скорость вращения медленно изменяется со временем и угловое ускорение пренебрежимо мало.

Установлено, что пластическое течение возникает одновременно на внешней и внутренней поверхностях цилиндра. Скорость вращения цилиндра, соответствующая началу пластического течения, найдена из решения упругой задачи. Для каждой пластической области найдено точное аналитическое решение определяющей системы уравнений. Приведены системы условий на границах между областями, обеспечивающие непрерывность полученных решений во всем цилиндре. Результаты расчетов проиллюстрированы графиками перемещений, напряжений и пластических деформаций.

Ключевые слова: вращающийся цилиндр, плоская деформация, упругопластичность, пластическое течение, закон Гука, условие Треска, повторное пластическое течение, остаточные напряжения.

Введение

Расчет напряженно-деформированного состояния вращающихся цилиндров и дисков относится к классическим задачам механики деформируемого твердого тела. В научной литературе опубликовано множество работ, посвященных решению данного класса задач для различных кинематических допущений и моделей материалов. Как правило, используется

один из следующих вариантов кинематики: плоское напряженное состояние, плоская деформация и обобщенная плоская деформация. Исследуется как обратимое (упругое), так и необратимое (пластическое течение и ползучесть) деформирование вращающихся цилиндров и дисков. В последние годы значительное внимание уделяется неоднородным и анизотропным материалам.

Во многих случаях представляют интерес материалы, которые проявляют некоторую комбинацию перечисленных свойств, например упругопластические материалы. Вращающийся сплошной цилиндр из упругопластического материала впервые изучался в [8], где использовалось условие Треска и ассоциированный закон пластического течения, а также отдельно рассматривался случай конечных деформаций. Авторы предполагали, что в цилиндре возникает единственная пластическая область, в которой радиальное и тангенциальное напряжения совпадают и превышают осевое напряжения на величину предела текучести. Однако, как позднее было показано в [5], данное предположение приводит к разрыву перемещений на упругопластической границе. Корректное решение данной задачи опубликовано в [4, 5]. Авторами показано, что условие Треска впервые выполняется в центре цилиндра, что приводит к одновременному появлению не одной, а двух пластических областей, первая из которых соответствует ребру призмы Треска, а вторая – ее грани. Последующее увеличение скорости вращения приводит к развитию пластического течения и уменьшению упругой области. Решение [4, 5] является непрерывным во всем цилиндре на всех стадиях пластического течения. В [9] на основе результатов [4, 5] изучается распределение остаточных деформаций в сплошном цилиндре после его вращения. Авторами также установлено, что если скорость вращения цилиндра была достаточно высокой, то при уменьшении скорости в нем может возникнуть повторное пластическое течение.

Полый цилиндр с закрепленными концами исследовался в [3]. Авторы рассматривали как идеально-пластический, так и линейно-упрочняющийся материал. Установлено, что пластическое течение происходит только в одной области, которая зарождается на внутренней поверхности цилиндра и с увеличением скорости вращения распространяется на весь цилиндр.

Исследование упругопластического деформирования в цилиндрах со свободными концами осложняется дополнительным условием на суммарную осевую силу. В [11] получено решение для вращающегося сплошного цилиндра, а в [10] – для полого. Сравнение результатов [10, 11] и [4, 5, 9] показывает, что пластическое течение во вращающихся цилиндрах с закрепленными и свободными концами характеризуется различной конфигурацией пластических областей. Заметим, что в отмеченных работах [3–5, 8–11] использовалась модель идеального упругопластического материала. Влияние вязких свойств материала на необратимое деформирование вращающихся дисков и цилиндров изучалось в работах [1, 2].

Детальный обзор научной литературы, посвященной расчету упругопластических деформаций во вращающихся цилиндрах и дисках, показал, что наиболее часто рассматриваются два случая: это сплошной либо полый цилиндр (диск), на боковых поверхностях которого заданы напряжения. Другие виды граничных условий, при которых на одной или двух граничных поверхностях вращающегося полого цилиндра задано перемещение, рассматриваются значительно реже, несмотря на их значительный прикладной интерес. В [6] получено решение для вращающегося диска с жестким включением, а в [7] – для вращающихся дисков с жестким покрытием на внешней поверхности, при этом внутренняя поверхность диска могла быть как свободной, так и зафиксированной от радиальных перемещений.

Настоящая статья посвящена исследованию вращающегося полого цилиндра из идеального упругопластического материала с жестким покрытием на внутренней и внешней граничных поверхностях. Подобные граничные условия на практике могут возникнуть в тех случаях, когда исходная деталь состоит из композитного материала, в котором внешняя и внутренняя часть состоят из более жесткого материала, по сравнению с материалом центральной части. Предполагается, что цилиндр находится в плоском деформированном состо-

янии, а деформации в нем являются малыми. Для постановки задачи используется условие Треска и ассоциированный с ним закон пластического течения. Мы рассмотрим стадии нагружения и разгрузки, включая повторное пластическое течение. Ранее подобная задача не решалась.

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечно длинную цилиндрическую среду с упругими и пластическими свойствами. Цилиндр ограничен двумя поверхностями $r = a$ и $r = b$ ($b > a$). Будем рассматривать случай, когда на двух граничных поверхностях наложено жесткое ограничение на радиальную компоненту перемещений. Положим, что такой цилиндр вращается с угловой скоростью $\omega(t)$. В начальный момент времени $\omega(0) = 0$. В дальнейшем скорость вращения постепенно увеличивается до значения $\omega = \omega_{max}$. После достижения этого значения скорость начинает плавно снижаться, вплоть до полной остановки вращения. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) получим одномерный процесс деформирования относительно координаты r . Для большей общности приведем ее к безразмерному виду

$$\beta = \frac{r}{b}, \quad \delta = \frac{a}{b}, \quad 0 < \delta \leq \beta \leq 1.$$

Деформации в материале будем считать малыми и состоящими из упругих и пластических. Ненулевыми компонентами деформаций в нашем случае будут только компоненты d_{rr} и $d_{\theta\theta}$ тензора полных деформаций:

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad d_{\theta\theta} = e_{\theta\theta} + p_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta}, \quad d_{zz} = e_{zz} + p_{zz} = 0, \quad (1)$$

где e_{rr} , $e_{\theta\theta}$, e_{zz} – компоненты тензора упругих деформаций; p_{rr} , $p_{\theta\theta}$, p_{zz} – компоненты тензора пластических деформаций; $u = u_r/b$ – безразмерные перемещения.

Напряжения в деформируемом слое определяются упругими деформациями в соответствии с законом Гука и в безразмерном виде примут значения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{\sigma_0} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{rr} + \nu e_{\theta\theta} + \nu e_{zz}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{\sigma_0} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + (1-\nu)e_{\theta\theta} + \nu e_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{\sigma_0} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + \nu e_{\theta\theta} + (1-\nu)e_{zz}), \end{aligned} \quad (2)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, σ_0 – предел текучести.

Соотношения, обратные к (2), имеют вид

$$e_{rr} = \frac{\sigma_0}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{zz}), \quad e_{\theta\theta} = \frac{\sigma_0}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr} - \nu \sigma_{zz}), \quad e_{zz} = \frac{\sigma_0}{E} (\sigma_{zz} - \nu \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}). \quad (3)$$

Подставив (3) в (1), получим соотношения для определения пластических деформаций через перемещения и напряжения

$$\begin{aligned} p_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\sigma_0}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{zz}), \quad p_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta} - \frac{\sigma_0}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr} - \nu \sigma_{zz}), \\ p_{zz} &= -\frac{\sigma_0}{E} (\sigma_{zz} - \nu \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}). \end{aligned} \quad (4)$$

Будем считать угловое ускорение достаточно малым, чтобы можно было пренебречь силой инерции, определяемой вращательным ускорением. Это позволяет оставаться в рамках одномерности. В таком случае единственное уравнение равновесия примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega\beta, \quad \Omega = \frac{\rho b^2 \omega^2}{\sigma_0} \geq 0, \quad (5)$$

где ρ – плотность материала, $\Omega = \Omega(t)$ — параметр нагрузки.

Для учета пластических свойств деформируемого слоя воспользуемся теорией пластического течения. Для задания поверхности нагружения возьмем условие пластичности Треска

$$f = \max(|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{rr} - \sigma_{zz}|, |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|) - 1 = 0. \quad (6)$$

Ассоциированный закон пластического течения для граней призмы Треска примет вид

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rr}}, \quad \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\theta\theta}}, \quad \frac{dp_{zz}}{dt} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}}, \quad (7)$$

где $d\lambda$ – положительный коэффициент.

Использование закона (7) вместе с условием (6) приводит к пластической несжимаемости. Из чего следует, что объемная деформация является чисто упругой. Исходя из этого и соотношений (4), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = \frac{\sigma_y}{E} (1 - 2\nu) (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}). \quad (8)$$

Граничные условия запишутся в виде

$$u(\delta) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (9)$$

Весь процесс деформирования цилиндра состоит из нагрузки (рост скорости вращения и, соответственно, параметра нагрузки) и разгрузки (уменьшение скорости вращения и параметра нагрузки). При нагрузке сначала происходит упругое деформирование. Потом, при достижении напряжениями поверхности нагружения, в цилиндре образуются области пластического течения. Впоследствии пластическое течение распространяется на всю область деформирования. После достижения параметром нагрузки заданного максимального значения начинается стадии разгрузки. Во время этой стадии сначала происходит упругое деформирование. При дальнейшем уменьшении значения параметра нагрузки вследствие накопленных пластических деформаций образуются области повторного пластического течения. Рассмотрим более подробно указанные стадии.

Решение

Упругое деформирование

Из соотношений (1), (2), (5), с учетом равенства нулю пластических деформаций, получим дифференциальное уравнение, решение которого примет вид

$$u = \frac{1}{2} D_1 \beta + \frac{D_2}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{\sigma_0}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \Omega \beta^3, \quad (10)$$

где D_1, D_2 – константы интегрирования. Напряжения примут значения

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{\sigma_0} \frac{D_1 \beta^2 - 2D_2(1-2\nu)}{2\beta^2(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{1}{8} \frac{3-2\nu}{1-\nu} \beta^2 \Omega, \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{\sigma_0} \frac{D_1 \beta^2 + 2D_2(1-2\nu)}{2\beta^2(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{1}{8} \frac{1+2\nu}{1-\nu} \beta^2 \Omega, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}).$$

Для текущих граничных условий (9) константы интегрирования D_1, D_2 будут равны

$$D_1 = \frac{1}{4} \frac{\sigma_0 (1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} (1+\delta^2) \Omega, \quad D_2 = -\frac{1}{8} \frac{\sigma_0 (1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \delta^2 \Omega. \quad (12)$$

Полученное упругое решение (10)–(12) справедливо при $\Omega < \Omega_I$. Пластическое течение начинается одновременно на двух граничных поверхностях. На внутренней граничной поверхности ($\beta = \delta$) напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$, а на внешней ($\beta = I$) – $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. Условие пластичности (6) примет вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1, \quad \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$$

на внутренней границе и

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1, \quad \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 1$$

на внешней.

Используя одно из этих условий и упругое решение (11), (12), получим следующее значение параметра нагрузки, соответствующее началу пластического течения:

$$\Omega_1 = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{4}{1-\delta^2}. \quad (13)$$

На (рис. 1) формула (13) представлена графически при разных значениях ν .

Рис. 1. Зависимость параметра нагрузки Ω_1 от δ при разных ν .

Упругопластическое деформирование

При $\Omega = \Omega_I$ в цилиндре появляются 4 области пластического течения. Обозначим их как области I, II, III и IV. Напряжения в области I ($\delta \leq \beta \leq \beta_I$) соответствуют ребру призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$. В области II ($\beta_I < \beta \leq \beta_2$) – грани призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$. В области III ($\beta_3 \leq \beta < \beta_4$) – грани $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. В области IV ($\beta_4 \leq \beta \leq I$) – ребру $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. В области $\beta_2 < \beta < \beta_3$ продолжается упругое деформирование.

С увеличением значения параметра нагрузки до $\Omega = \Omega_2$ на упругопластической границе $\beta = \beta_2$ происходит выполнение равенства $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$. Это приводит к зарождению двух новых областей пластического течения V и VI. Область V ($\beta_2 \leq \beta \leq \beta_5$) соответствует ребру призмы Треска $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$. Область VI ($\beta_5 \leq \beta \leq \beta_6$) соответствует грани $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$. В области $\beta_6 < \beta < \beta_3$ продолжается упругое деформирование.

При $\Omega = \Omega_3$ происходит совмещение границ β_6 и β_3 . Одновременно с этим на месте их совмещения ($\beta = \beta_6 = \beta_3$) выполняется равенство $\sigma_{rr} = \sigma_{zz}$. Это приводит к тому, что область упругого деформирования между областями VI и III исчезает и на ее месте появляется область пластического течения VII. Область VII ($\beta_6 \leq \beta \leq \beta_3$) соответствует ребру призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} = \sigma_{zz}$.

При дальнейшем увеличении значения параметра нагрузки вплоть до $\Omega = \Omega_{max}$ области пластического течения II, III, VI, соответствующие граням призмы Треска, постепенно

уменьшаются. В это время области пластического течения I, IV, V, VII, находящиеся между ними и соответствующие ребрам призмы Треска, постепенно расширяются.

Рассмотрим каждую область более подробно.

Упругая область

Полученное ранее упругое решение (10), (11) остается справедливым, однако значения констант интегрирования D_1 , D_2 необходимо определять из условий на новых границах упругой области. При $\Omega_1 \leq \Omega < \Omega_2$ это границы $\beta = \beta_2$ и $\beta = \beta_3$. Затем при $\Omega_2 \leq \Omega < \Omega_3$ это границы $\beta = \beta_6$ и $\beta = \beta_3$.

Область I

Напряжения соответствуют ребру призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$. Условие пластичности (6) принимает вид

$$e^{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}} = 1, \quad \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1.$$

С помощью данного условия и уравнения (5) найдем значения напряжений

$$\sigma_{rr} = C_1 - \frac{1}{2} \beta^2 \Omega - \ln \beta, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 1, \quad (14)$$

где C_1 — константа интегрирования. В дальнейшем за C_i будем обозначать константы интегрирования для областей пластического течения на стадии нагрузки.

Подставив данные напряжения (14) в (8), получим дифференциальное уравнение для перемещений, решение которого имеет вид

$$u = \frac{3}{2} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) C_1 \beta + \frac{C_2}{\beta} - \frac{3}{8} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu) \Omega \beta^3 - \frac{1}{4} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu) (1+6 \ln \beta) \beta. \quad (15)$$

Из уравнений (4), (14), (15) можно найти значения пластических деформаций.

Область II

Напряжения соответствуют грани призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$. Условие пластичности (6) принимает вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1.$$

Из ассоциированного закона пластического течения (7), с учетом (1) и данного условия пластичности можно выразить полные деформации через упругие. Из них, с помощью (3) и условия пластичности, можно найти напряжения

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{E}{\sigma_0} \frac{d_{rr} + 2\nu d_{\theta\theta}}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{\sigma_0} \frac{\nu d_{rr} + (1-\nu) d_{\theta\theta}}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 1. \quad (16)$$

Подставив полученные напряжения в уравнение равновесия (5), с учетом (1), получим дифференциальное уравнение, решение которого примет вид

$$u = C_3 \beta^{-\sqrt{2-2\nu}} + C_4 \beta^{\sqrt{2-2\nu}} + \frac{\sigma_0}{E} (1+\nu) \beta - 2 \frac{\sigma_0}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{7+2\nu} \Omega \beta^3. \quad (17)$$

Из (1), (16), (17) можно получить итоговые выражения для напряжений. Из них и уравнений (4), (17) можно найти значения пластических деформаций.

Область III

Напряжения соответствуют грани призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. Условие пластичности (6) принимает вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1.$$

С помощью данного условия и уравнения (5) найдем напряжения

$$\sigma_{rr} = C_5 - \frac{1}{2} \beta^2 \Omega + \ln \beta, \quad \sigma_{\theta\theta} = 1 + \sigma_{rr}. \quad (18)$$

Из ассоциированного закона пластического течения (7) найдем зависимости для компонент тензора пластических деформаций. С учетом полученных зависимостей из (1) следует, что $e_{zz} = 0$. В результате осевое напряжение σ_{zz} определяется так же, как и в случае упругости (11). Подставив полученные напряжения (18) в (8), получим дифференциальное уравнение для перемещений, решение которого имеет вид

$$u = \frac{\sigma_0}{E} (1+\nu)(1-2\nu) C_5 \beta + \frac{C_6}{\beta} - \frac{1}{4} \frac{\sigma_0}{E} (1+\nu)(1-2\nu) \Omega \beta^3 + \frac{\sigma_0}{E} (1+\nu)(1-2\nu) \beta \ln \beta. \quad (19)$$

Пластические деформации можно найти из (4), с учетом (18)–(19).

Область IV

Напряжения соответствуют ребру призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. По аналогии с областью I получим напряжения

$$\sigma_{rr} = C_7 - \frac{1}{2} \beta^2 \Omega + \ln \beta, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = 1 + \sigma_{rr} \quad (20)$$

и перемещения

$$u = \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu) C_7 \beta + \frac{C_8}{\beta} - \frac{3}{8} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu) \Omega \beta^3 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu) (1+6 \ln \beta) \beta. \quad (21)$$

Область V

Напряжения соответствуют ребру призмы Треска $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$. Условие пластичности (6) принимает вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1, \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1. \quad (22)$$

По аналогии с областью I получим напряжения

$$\sigma_{rr} = C_9 - \frac{1}{2} \beta^2 \Omega, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 1 \quad (23)$$

и перемещения

$$u = \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu) C_9 \beta + \frac{C_{10}}{\beta} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu) \beta - \frac{3}{8} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu) \Omega \beta^3. \quad (24)$$

Область VI

Напряжения соответствуют грани призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$. Условие пластичности (6) принимает вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1.$$

По аналогии с областью II выразим напряжения через полные деформации, используя данное условие пластичности и соотношения (1), (3) и (7)

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{\sigma_0} \frac{(1-\nu)d_{rr} + \nu d_{\theta\theta}}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{E}{\sigma_0} \frac{2\nu d_{rr} + d_{\theta\theta}}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} - 1. \quad (25)$$

Подставив напряжения (25) в уравнение равновесия (5), с учетом (1), получим дифференциальное уравнение относительно перемещений. Его решение примет вид

$$u = C_{11}\beta^{\frac{-1}{\sqrt{2-2\nu}}} + C_{12}\beta^{\frac{1}{\sqrt{2-2\nu}}} + \frac{\sigma_0}{E}(1+\nu)\beta - 2\frac{\sigma_0}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{17-18\nu}\Omega\beta^3. \quad (26)$$

Из (1), (25), (26) можно получить окончательные формулы для напряжений. Пластические деформации найдем, подставив полученные напряжения и перемещения в (4).

Область VII

Напряжения соответствуют ребру призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} = \sigma_{zz}$. Условие пластичности (6) примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1, \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1.$$

По аналогии с областью I получим напряжения

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = C_{13} - \frac{1}{2}\beta^2\Omega + \ln\beta, \quad \sigma_{\theta\theta} = 1 + \sigma_{rr}, \quad (27)$$

и перемещения

$$u = \frac{3}{2}\frac{\sigma_0}{E}(1-2\nu)C_{13}\beta + \frac{C_{14}}{\beta} - \frac{3}{8}\frac{\sigma_0}{E}(1-2\nu)\Omega\beta^3 - \frac{1}{4}\frac{\sigma_0}{E}(1-2\nu)(1-6\ln\beta)\beta. \quad (28)$$

Разгрузка

После достижения значения $\Omega = \Omega_{max}$ скорость вращения ω начинает уменьшаться, что в свою очередь приводит к уменьшению значения параметра нагрузки Ω . В связи с этим уменьшаются напряжения и, соответственно, происходит упругое деформирование цилиндра. На процесс упругости оказывают влияние накопленные пластически деформации. Обозначим их как

$$\hat{p}_{rr} = p_{rr}(\Omega_{max}), \quad \hat{p}_{\theta\theta} = p_{\theta\theta}(\Omega_{max}), \quad \hat{p}_{zz} = p_{zz}(\Omega_{max}). \quad (29)$$

Преобразуя уравнение равновесия (5) с учетом (1) и (29), получим дифференциальное уравнение в перемещениях для стадии разгрузки. В общем случае решение данного неоднородного уравнения примет вид

$$u = B_1\beta + \frac{B_2}{\beta} + \frac{1}{2}\beta \int \hat{p} d\beta - \frac{1}{2\beta} \int \beta^2 \hat{p} d\beta - \frac{\sigma_0}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \beta^3 \Omega, \\ \hat{p} = \frac{1}{\beta} \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\hat{p}_{rr} - \hat{p}_{\theta\theta}) + \frac{\partial \hat{p}_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \hat{p}_{\theta\theta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \hat{p}_{zz}}{\partial \beta} \right), \quad (30)$$

где B_1, B_2 – константы интегрирования.

Подставив значения накопленных пластических деформаций, для каждой из областей I–VII можно получить соответствующие формулы для перемещений. Напряжения можно найти из (2) с учетом (1), значений перемещений и накопленных пластических деформаций.

Повторное пластическое течение

При дальнейшем снижении скорости вращения в цилиндре образуются области повторного пластического течения. В таких областях пластические деформации будут состоять из накопленных ($\hat{p}_{rr}, \hat{p}_{\theta\theta}, \hat{p}_{zz}$) и вторичных ($s_{rr}, s_{\theta\theta}, s_{zz}$) пластических деформаций

$$p_{rr} = \hat{p}_{rr} + s_{rr}, \quad p_{\theta\theta} = \hat{p}_{\theta\theta} + s_{\theta\theta}, \quad p_{zz} = \hat{p}_{zz} + s_{zz}. \quad (31)$$

При уменьшении параметра нагрузки до значения $\Omega = \Omega_4$ в цилиндре зарождаются 4 области повторного пластического течения. Обозначим их VIII, IX, X, XI. Область VIII ($\delta \leq \beta \leq \beta_7$) соответствует ребру призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, область IX ($\beta_7 < \beta \leq \beta_8$) – грани $\sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$, область X ($\beta_9 \leq \beta < \beta_{10}$) — грани $\sigma_{rr} > \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}$, область XI ($\beta_{10} \leq \beta \leq I$) – ребру $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$.

При дальнейшем уменьшении параметра нагрузки в момент, когда $\Omega = \Omega_5$, упруго-пластическая граница $\beta = \beta_8$ сравняется с предыдущей границей области $\beta = \beta_1$. Соответственно, область пластического течения IX разобьем на две подобласти: IX ($\beta_7 < \beta \leq \beta_1$) и XII ($\beta_1 < \beta \leq \beta_8$). Различия между ними заключаются только в накопленных пластических деформациях.

Рассмотрим подробнее получившиеся области повторного пластического течения.

Область VIII

Напряжения соответствуют ребру призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. Напряжения определяются из (20), перемещения из (21). Константы интегрирования C_7, C_8 заменяются на A_1, A_2 . В дальнейшем для констант интегрирования областей повторного пластического течения будем использовать обозначения A_i .

Область IX

Напряжения соответствуют грани призмы Треска $\sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$. Условие пластичности (6) примет вид

$$\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 1.$$

По аналогии с областью II из ассоциированного закона пластического течения (7) найдем соотношения, связывающие компоненты тензора вторичных пластических деформаций. Из них и соотношений (1), (3) и (31) выразим значения полных деформаций через напряжения и накопленные пластические деформации. Из данной системы, с помощью соотношений (1) и условия пластичности, найдем значения напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} - 1 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{E}{\sigma_0 (1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2\nu \frac{u}{r} - \hat{p}_{rr} - 2\nu \hat{p}_{\theta\theta} - \hat{p}_{zz} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{\sigma_0 (1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial r} + (1-\nu) \frac{u}{r} - \nu \hat{p}_{rr} - (1-\nu) \hat{p}_{\theta\theta} - \nu \hat{p}_{zz} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Подставив напряжения в уравнение равновесия (5), получим дифференциальное уравнение в перемещениях. В общем случае решение данного неоднородного уравнения примет вид

$$\begin{aligned} u &= A_3 \beta^{-\sqrt{2-2\nu}} + A_4 \beta^{\sqrt{2-2\nu}} + \frac{1}{2} \frac{\beta^{\sqrt{2-2\nu}}}{\sqrt{2-2\nu}} \int \beta^{1-\sqrt{2-2\nu}} \hat{p} d\beta + \frac{1}{2} \frac{\beta^{-\sqrt{2-2\nu}}}{\sqrt{2-2\nu}} \int \beta^{1+\sqrt{2-2\nu}} \hat{p} d\beta - \\ &\quad - 3 \frac{\sigma_0}{E} \sqrt{2-2\nu} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)(7+2\nu)} \beta^3 \Omega - \frac{\sigma_0}{E} \frac{1+\nu}{\sqrt{2-2\nu}} \beta, \\ \hat{p} &= \frac{1}{\beta} (1-2\nu) (\hat{p}_{rr} - 2\hat{p}_{\theta\theta} + \hat{p}_{zz}) + \frac{\partial \hat{p}_{rr}}{\partial \beta} + 2\nu \frac{\partial \hat{p}_{\theta\theta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \hat{p}_{zz}}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (33)$$

С учетом накопленных пластических деформаций получим

$$u = A_3 \beta^{-\sqrt{2-2\nu}} + A_4 \beta^{\sqrt{2-2\nu}} + \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu) C_1 \beta + \frac{C_2}{\beta} - 2 \frac{\sigma_0}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{7+2\nu} \Omega \beta^3 - \frac{5}{8} \frac{\sigma_0}{E} \frac{(1-2\nu)^2}{7+2\nu} \Omega_{\max} \beta^3 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_0}{E} (3+2\nu+2(1-2\nu) \ln \beta) \beta. \quad (34)$$

Пластические деформации можно найти, подставив (32), (34) и накопленные пластические деформации в (4).

Область X

Напряжения соответствуют грани призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}$. Условие пластичности (6) принимает вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1.$$

С помощью данного условия и уравнения равновесия (5) найдем значение двух компонент тензора напряжений. Из ассоциированного закона пластического течения (7) найдем зависимости для компонент тензора вторичных пластических деформаций ($s_{rr} = -s_{\theta\theta}$, $s_{zz} = 0$). Учитывая данные зависимости и значения накопленных пластических деформаций, найдем формулу для третьей компоненты тензора напряжений. В итоге получим

$$\sigma_{rr} = A_5 - \frac{1}{2} \beta^2 \Omega - \ln \beta, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - 1, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \frac{E}{\sigma_0} \hat{p}_{zz}. \quad (35)$$

Подставив напряжения (35) в (8), получим дифференциальное уравнение в перемещениях. Его решение, с учетом накопленных деформаций, имеет вид

$$u = A_5 \frac{\sigma_0}{E} (1+\nu)(1-2\nu) \beta + \frac{A_6}{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu)^2 C_7 \beta - \frac{1}{4} \frac{\sigma_0}{E} (1+\nu)(1-2\nu) \Omega \beta^3 - \frac{1}{8} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu)^2 \Omega_{\max} \beta^3 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_0}{E} (1-2\nu)(1-2(1+4\nu) \ln \beta) \beta. \quad (36)$$

Подставив (35), (36) в (4) и учтя накопленные пластические деформации, можно найти значения пластических деформаций.

Область XI

Напряжения соответствуют ребру призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$. Напряжения принимают значения (14), перемещения – (15). Константы интегрирования C_1 , C_2 заменяются на A_7 , A_8 .

Область XII

Данная область является продолжением области пластического течения IX. Соответственно перемещения определяются из формулы (33) с константами A_9 , A_{10} вместо A_3 , A_4 . Из накопленных пластических деформаций в данной области следует, что $\hat{p} = 0$. На основе этого формула (33) примет вид

$$u = A_9 \beta^{-\sqrt{2-2\nu}} + A_{10} \beta^{\sqrt{2-2\nu}} - \frac{\sigma_0}{E} (1+\nu) \beta - 2 \frac{\sigma_0}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{7+2\nu} \Omega \beta^3. \quad (37)$$

Результаты расчетов

Расчеты производились при следующих физических и геометрических параметрах:

$$\delta = 0,2; \quad \nu = 0,3; \quad \sigma_y = 250 \text{ МПа}; \quad E = 21 \text{ ГПа}; \quad \Omega_{\max} = 22.$$

Пластическое течение в цилиндре начинается на внешней и внутренней граничных поверхностях, согласно (13), при $\Omega_1 = 175/24 \approx 7,2917$. При $\Omega > \Omega_1$, в цилиндре имеется 4 области пластического течения и одна область упруго деформирования. В результате получается 10 неизвестных констант интегрирования $D_1, D_2, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ и 4 границы областей $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. Для их определения составим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} u^I(\delta) &= 0; \quad u^{IV}(1) = 0; \\ \beta = \beta_1: \quad u^I &= u^{II}; \quad \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{II}; \quad \sigma_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^{II}; \\ \beta = \beta_2: \quad u^{II} &= u^{el}; \quad \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^{el}; \quad \sigma_{rr}^{el} - \sigma_{zz}^{el} = 1; \\ \beta = \beta_3: \quad u^{el} &= u^{III}; \quad \sigma_{rr}^{el} = \sigma_{rr}^{III}; \quad \sigma_{\theta\theta}^{el} - \sigma_{rr}^{el} = 1; \\ \beta = \beta_4: \quad u^{III} &= u^{IV}; \quad \sigma_{rr}^{III} = \sigma_{rr}^{IV}; \quad \sigma_{zz}^{III} = \sigma_{zz}^{IV}, \end{aligned} \quad (38)$$

где верхний индекс I–IV обозначает принадлежность к области пластического течения под заданным номером, верхний индекс *el* — к области упругого деформирования.

Полученная система линейно зависит от коэффициентов интегрирования и нелинейно — от положения границ. Из первых двух уравнений в каждой строчке данной системы уравнений можно найти аналитические формулы для констант интегрирования. Границы областей можно найти численно из третьих уравнений в строчках со второй по пятую, подставив в них предварительно найденные значения коэффициентов.

Для нахождения значения параметра нагрузки $\Omega = \Omega_2$, при котором появятся области пластического течения V и VI на упругопластической границе β_2 , разрешим одно из условий пластического течения (22) совместно с системой (38). Получим следующие значения:

$$\Omega_2 = 18,2737; \quad \beta_1 = 0,259; \quad \beta_2 = 0,4286; \quad \beta_3 = 0,676; \quad \beta_4 = 0,8338.$$

При $\Omega > \Omega_2$ в цилиндре появятся еще две области пластического течения. То есть 4 константы интегрирования $C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ и две границы β_5, β_6 . Для их определения в систему (39) внесем следующие изменения:

$$\begin{aligned} \beta = \beta_2: \quad u^{II} &= u^V; \quad \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^V; \quad \sigma_{\theta\theta}^{II} = \sigma_{\theta\theta}^V; \\ \beta = \beta_5: \quad u^V &= u^{VI}; \quad \sigma_{rr}^V = \sigma_{rr}^{VI}; \quad \sigma_{zz}^V = \sigma_{zz}^{VI}; \\ \beta = \beta_6: \quad u^{VI} &= u^{el}; \quad \sigma_{rr}^{VI} = \sigma_{rr}^{el}; \quad \sigma_{\theta\theta}^{el} - \sigma_{zz}^{el} = 1. \end{aligned} \quad (39)$$

При $\Omega = \Omega_3$ происходит совмещение упругопластических границ β_6 и β_3 . На месте их совмещения вместо области упругого деформирования появится область VII пластического течения. Следовательно, для нахождения данного значения можно воспользоваться либо условием равенства положения границ β_5 и β_3 , либо равенства компонент напряжений σ_{rr} и σ_{zz} на этих границах. В итоге получим

$$\Omega_3 = 20,9841; \quad \beta_1 = 0,2659; \quad \beta_2 = 0,4088; \quad \beta_5 = 0,4428; \quad \beta_6 = \beta_3 = 0,6397; \quad \beta_4 = 0,8192.$$

При дальнейшем росте скорости вращения в систему (38), (39) внесутся изменения

$$\begin{aligned} \beta = \beta_6: \quad u^{VI} &= u^{VII}; \quad \sigma_{rr}^{VI} = \sigma_{rr}^{VII}; \quad \sigma_{zz}^{VI} = \sigma_{zz}^{VII}; \\ \beta = \beta_3: \quad u^{VII} &= u^{III}; \quad \sigma_{rr}^{VII} = \sigma_{rr}^{III}; \quad \sigma_{zz}^{VII} = \sigma_{zz}^{III}. \end{aligned} \quad (40)$$

В итоге при заданном значении параметра нагрузки $\Omega = \Omega_{max}$ получим следующие положения границ областей

$$\beta_1 = 0,2682; \quad \beta_2 = 0,4031; \quad \beta_5 = 0,4474; \quad \beta_6 = 0,6351; \quad \beta_3 = 0,6441; \quad \beta_4 = 0,8146.$$

На (рис. 2) показаны графики распределения напряжений в цилиндре при найденных значениях параметра нагрузки, а также накопленные в итоге пластические деформации и диаграмма развития областей пластического течения.

Рис. 2. НДС цилиндра при нагрузке:
а – напряжения при $\Omega = \Omega_1$; **б** – напряжения при $\Omega = \Omega_2$;
в – напряжения при $\Omega = \Omega_3$; **г** – напряжения при $\Omega = \Omega_{max}$; **д** – пластические деформации при $\Omega = \Omega_{max}$; **е** – развитие областей пластического течения.

При снижении скорости вращения полученные 7 областей пластического течения заменяются на 7 областей упругого деформирования. Неизвестными будут 14 констант интегрирования. Положения границ областей останутся неизменными. Составим следующую систему уравнений для нахождения констант интегрирования:

$$\begin{aligned}
 & u^I(\delta) = 0; \quad u^{IV}(1) = 0; \\
 & \beta = \beta_1: \quad u^I = u^{II}; \quad \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{II}; \quad \beta = \beta_6: \quad u^{VI} = u^{VII}; \quad \sigma_{rr}^{VI} = \sigma_{rr}^{VII}; \\
 & \beta = \beta_2: \quad u^{II} = u^V; \quad \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^V; \quad \beta = \beta_3: \quad u^{VII} = u^{III}; \quad \sigma_{rr}^{VII} = \sigma_{rr}^{III}; \\
 & \beta = \beta_5: \quad u^V = u^{VI}; \quad \sigma_{rr}^V = \sigma_{rr}^{VI}; \quad \beta = \beta_4: \quad u^{III} = u^{IV}; \quad \sigma_{rr}^{III} = \sigma_{rr}^{IV}.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Для нахождения значения $\Omega = \Omega_4$, при котором появятся области повторного пластического течения, совместно с данной системой разрешим одно из условий пластичности на граничных поверхностях цилиндра. В итоге получим $\Omega_4 = 7,4167$. Отметим, что численно получается $\Omega_4 = \Omega_{\max} - 2 \Omega_1$. К сожалению, затруднительно подтвердить данную зависимость аналитически, так как полученная формула для Ω_4 является весьма громоздкой и нелинейно зависит от границ упругих областей.

При $\Omega < \Omega_4$ появляются еще четыре области. В систему (41) внесутся следующие изменения:

$$\begin{aligned} u^{VIII}(\delta) &= 0; \quad u^{XI}(1) = 0; \\ \beta = \beta_7: \quad u^{VIII} &= u^{IX}; \quad \sigma_{rr}^{VIII} = \sigma_{rr}^{IX}; \quad \sigma_{\theta\theta}^{IX} = \sigma_{zz}^{IX}; \\ \beta = \beta_8: \quad u^{IX} &= u^I; \quad \sigma_{rr}^{IX} = \sigma_{rr}^I; \quad \sigma_{zz}^I - \sigma_{rr}^I = 1; \\ \beta = \beta_9: \quad u^{IV} &= u^X; \quad \sigma_{rr}^{IV} = \sigma_{rr}^X; \quad \sigma_{rr}^{IV} - \sigma_{\theta\theta}^{IV} = 1; \\ \beta = \beta_{10}: \quad u^X &= u^{XI}; \quad \sigma_{rr}^X = \sigma_{rr}^{XI}; \quad \sigma_{\theta\theta}^X = \sigma_{zz}^X. \end{aligned} \quad (42)$$

Когда параметр нагрузки достигает значения $\Omega = \Omega_5$, упругопластическая граница β_8 достигает границы упругой области β_1 . Добавив в систему (41)–(42) равенство этих границ в качестве дополнительного условия, найдем данное значение параметра нагрузки

$$\Omega_5 = 1,8167; \quad \beta_7 = 0,2237; \quad \beta_8 = \beta_1 = 0,2682; \quad \beta_9 = 0,8638; \quad \beta_{10} = 0,9231$$

При дальнейшем уменьшении скорости образуется подобласть XII, что приводит к следующим изменениям в системе (41)–(42):

$$\begin{aligned} \beta = \beta_1: \quad u^{IX} &= u^{XII}; \quad \sigma_{rr}^{IX} = \sigma_{rr}^{XII}; \\ \beta = \beta_8: \quad u^{XII} &= u^{II}; \quad \sigma_{rr}^{XII} = \sigma_{rr}^{II}; \quad \sigma_{zz}^{II} - \sigma_{rr}^{II} = 1; \end{aligned} \quad (43)$$

При остановке вращения (параметр нагрузки $\Omega = 0$) из системы (41)–(43) получим следующие положения границ пластических областей

$$\beta_7 = 0,2295; \quad \beta_8 = 0,2905; \quad \beta_9 = 0,832; \quad \beta_{10} = 0,9066.$$

На (рис. 3) приведены графики напряжений, пластических деформаций и перемещений для найденных значений параметра нагрузки. Также показана диаграмма развития областей пластического течения.

Стоит отметить, что чем меньше значение δ , тем меньше скорость (и, соответственно, значение параметра нагрузки), при которой начнется пластическое течение, – и меньше значения накопленных к этому моменту деформаций. Так, получим следующие значения при $\delta = 0,1$:

$$\Omega_1 = 7,0707; \quad \Omega_2 = 15,2579; \quad \Omega_3 = 18,9173; \quad p_{rr}(\delta, \Omega_3) = 0,0264,$$

и при $\delta = 0,4$:

$$\Omega_1 = 8,3333; \quad \Omega_2 = 29,5646; \quad \Omega_3 = 31,2925; \quad p_{rr}(\delta, \Omega_3) = 0,0455.$$

При значении параметров $\delta = 0,03$ и $\Omega_{\max} = 28$ удастся добиться появления новых областей повторного пластического течения. Одна область соответствует ребру призмы Треска с условиями $\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 1$ и $\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta} = 1$, а вторая – грани с условием $\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta} = 1$. Получим следующие ключевые значения параметра нагрузки:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 7,0063; \quad \Omega_2 = 13,6929; \quad \Omega_3 = 18,3197; \quad \Omega_{\max} = 28; \quad p_{rr}(\delta, \Omega_{\max}) = 0,0479; \\ \Omega_4 &= 13,9874 = \Omega_{\max} - 2\Omega_1; \quad \Omega_5 = 9,0434; \quad \Omega_6 = 5,0417; \quad \Omega_7 = 5,0225; \\ \Omega_8 &= 0,6142 = \Omega_{\max} - 2\Omega_2, \end{aligned}$$

где Ω_6 – значение параметра нагрузки, при котором $\beta_9 = \beta_2$; Ω_7 – значение, при котором $\beta_{10} = \beta_3$; Ω_8 – значение, при котором появляются новые области повторного пластического течения.

Рис. 3. НДС цилиндра при разгрузке:

а – напряжения при $\Omega = \Omega_4$; б – напряжения при $\Omega = \Omega_5$;

в – напряжения при $\Omega = 0$; г – пластические деформации при $\Omega = 0$; д – развитие областей повторного пластического течения; е – перемещения в цилиндре при различных Ω .

Если предположить, что для значения параметра нагрузки, при котором повторное пластическое течение распространится на весь цилиндр, выполняется то же соотношение, что и для значений, при которых появляются области повторного пластического течения Ω_4 и Ω_8 , то получим, что максимальное значение параметра нагрузки должно принимать как минимум значение $\Omega_{max} = 2\Omega_3 = 36,6394$. Однако для рассмотрения этого случая необходимо использовать модель конечных деформаций.

Можно отметить, что при упругости места, где компонента напряжений σ_{rr} пересекает другие компоненты напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} , остаются неизменными при росте значения параметра нагрузки. Они соответственно принимают значения

$$\beta = \sqrt{\delta}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{6} \left(1 + \delta^2 + \sqrt{1 + 14\delta^2 + \delta^4} \right)}. \quad (44)$$

В первом случае (при $\delta = 0,2$) эти точки принимают значения $\beta = 0,4472$ и $\beta = 0,6177$. Полученные расчеты свидетельствуют, что они довольно близки к положению мест, где зарождаются области пластического течения V ($\beta_2(\Omega_2) = 0,4286$) и VII ($\beta_3(\Omega_3) = 0,6397$).

Для случая $\delta = 0,03$ получим значения $\beta = 0,1732$ и $\beta = 0,5784$. Места зарождения областей пластического течения соответственно $\beta_2(\Omega_2) = 0,1576$ и $\beta_3(\Omega_3) = 0,6073$. Также место зарождения области повторного пластического течения соответствует $\beta_8(\Omega_8) = 0,1576$.

Заключение

В рамках модели малых деформаций было получено решение новой задачи упруго-пластического деформирования вращающегося цилиндра с жестким покрытием на внешней и внутренней стенках. Был полностью описан случай деформирования на стадии роста скорости вращения – от упругого деформирования до полного перехода цилиндра в пластическое состояние. Кроме того, частично рассмотрен случай повторного деформирования на стадии уменьшения скорости вращения. Рассмотрено упругое деформирование после того, как цилиндр полностью перешел в пластическое состояние. Рассмотрена стадия появления областей повторного пластического течения на внутренней и внешней граничных поверхностях и стадия зарождения дополнительных областей пластического течения (переход через ребро призмы Треска) внутри деформируемой среды. Полученное решение позволяет получить непрерывное распределение перемещений, напряжений и деформаций в цилиндре в зависимости от текущей скорости вращения и положения границ областей пластического течения.

При рассмотрении нескольких частных случаев были обнаружены определенные закономерности. Одна из них: связь скоростей, при которых зарождаются области повторного пластического течения, со скоростями зарождения областей первичного пластического течения. Другая обнаруженная закономерность связана с возможностью прогнозирования примерного местоположения области, где напряжения внутри среды будут выходить на ребро призмы Треска.

Сравнение полученных результатов с результатами работы [2], в которой рассматривался вращающийся полый цилиндр со свободными граничными поверхностями, позволяет отметить, что значение параметра нагружения Ω , при котором появляется пластическое течение и при котором весь цилиндр переходит в пластическое состояние, более чем в пять раз выше в цилиндре с жестким покрытием на граничных поверхностях. То есть нанесение жесткого покрытия на обе поверхности позволяет увеличить более чем в два раза значение скорости вращения ω , при котором в цилиндре зарождается пластическое течение. Также в то время как в цилиндре со свободными граничными поверхностями пластическое течение распространится на весь деформируемый слой (в статье [2] это $\Omega_{fp} = 3,8717$), в цилиндре с жестким покрытием на двух граничных поверхностях пластическое течение еще даже не успевает начаться (в нашем случае пластическое течение появляется при $\Omega_I = 7,2917$).

С практической точки зрения полученные результаты позволяют сказать, что изготовление труб и валов, подверженных высоким скоростям вращения, путем нанесения жесткого

покрытия или вставок позволит значительно увеличить ресурс данной детали. Также, как видно из представленных графиков пластических деформаций, мы можем заранее спрогнозировать, какие части данной детали будут подвержены значительным деформациям. В наших обозначениях это будут области I–IV. Границы максимального распространения этих областей мы можем приблизительно предсказать из результатов упругого решения, причем положение этих границ будет зависеть только от геометрических параметров детали, о чем нам говорит формула (44). Это позволит дополнительно увеличить ресурс детали, если подвергнуть данные области дополнительной обработке, в результате которой повысится сопротивление деформации данной области детали (повышение предела текучести).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бегун А.С., Ковтанюк Л.В. Расчет напряжений, деформаций и перемещений во вращающемся диске в условиях ползучести // Вестник Чувашского гос. педагогич. ун-та им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. Т. 39, № 1. С. 84–93. DOI: <https://dx.doi.org/10.26293/chgpu.2019.39.1.011>
2. Прокудин А.Н., Фирсов С.В. Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18, № 2. С. 242–260.
3. Gamer U., Lance R.H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube. *Acta Mechanica*. 1983;50(1–2):1–8. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/BF01170437>
4. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends. *International Journal of Engineering Science*. 1997;35(3):253–267. DOI: [https://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7).
5. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP*. 1984;35(5):601–617. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/BF00952107>
6. Güven U. Elastic-Plastic Rotating Disk with Rigid Inclusion. *Mechanics of Structures and Machines*. 1999;27(1):117–128. DOI: <https://dx.doi.org/10.1080/08905459908915691>
7. Güven U., Parmaksizoglu C., Altay O. Elastic-Plastic Rotating Annular Disk with Rigid Casing. *ZAMM. J. of Applied Mathematics and Mechanics. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1999;79(7):499–503.
8. Hodge P.G., Balaban M. Elastic-plastic analysis of a rotating cylinder. *Intern. J. of Mechanical Sciences*. 1962;4(6):465–476. DOI: [https://dx.doi.org/10.1016/S0020-7403\(62\)80008-3](https://dx.doi.org/10.1016/S0020-7403(62)80008-3)
9. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation. *ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1998;78(2):75–86. DOI: [https://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199802\)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V](https://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V)
10. Mack W. Rotating Elastic-plastic tube with free ends. *Intern. J. of Solids and Structures*. 1991;27(11):1461–1476. DOI: [https://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90042-E](https://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E)
11. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends. *Tech. Mech*. 1991;(12):119–124.

DOI: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2019-4-2>

Prokudin A., Firsov S.

ALEXANDER PROKUDIN, Candidate of Engineering Sciences, Leading Researcher,

e-mail: sunbeam_85@mail.ru

AuthorID: 415431, SPIN: 6812-2451, ORCID: 0000-0002-5156-424X,

ResearcherID: N-9344-2016, ScopusID: 35722777500

SERGEY FIRSOV, Junior Researcher, e-mail: firsov.s.new@yandex.ru

AuthorID: 783315, SPIN: 8267-2329, ORCID: 0000-0001-7446-6231,

ResearcherID: D-1966-2018, ScopusID: 56976208300

Institute of machinery and metallurgy of Far Eastern Branch of RAS

1 Metallurgov St., Komsomolsk-on-Amur, Russia, 681005

Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a hard coating on the inner and outer walls

Abstract: Consideration is being given to a hollow cylinder which is made of an ideal isotropic elastoplastic material in conditions of plain strain and with restriction on radial displacement on the inner and outer surfaces. It is assumed, that total strain in the cylinder is small and consists of elastic and plastic strains. Stresses are related with elastic strains by Hooke's law, plastic strains are determined by the Tresca conditions and the law of plastic flow associated with it. The deformation of the cylinder occurs due to centrifugal forces arising from the rotation of the cylinder with an angular speed, which first increases to the selected maximum value, and then decreases until the cylinder stops completely. It is assumed that the rotation speed slowly changes with time and angular acceleration is negligible.

It is established that plastic flow occurs simultaneously on both inner and outer surfaces of the cylinder. The rotation speed corresponding to the onset of plastic flow is found from the solution of the elasticity problem. Exact analytical solutions of the determining system of equations for each plastic field are found. The system of conditions at the boundaries between the regions providing continuity of the obtained solutions throughout the cylinder is given. The calculation results are illustrated by graphs of displacement, stresses and plastic deformations.

Keywords: rotating cylinder, plain strain, elastoplastic, plastic flow, Hooke's law, Tresca condition, secondary plastic flow, residual stress.

REFERENCES

1. Begun A.S., Kovtanuk L.V. Calculation of stresses, strains and displacements in a rotating disk under creep conditions. Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2019;39(1):84–93. DOI: <https://dx.doi.org/10.26293/chgpu.2019.39.1.011>
2. Prokudin A.N., Firsov S.V. Viscoplastic flow in a rotating hollow cylinder. Far Eastern Mathematical Journal. 2018;18(2):242–260.

For a complete list of references, see the previous page.