Механика деформируемого твердого тела

DOI: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-3-2>
УДК 539.3

Л.А. Бойко, Л.С. Ксендзенко

БОЙКО ЛЮДМИЛА АЛЕКСАНДРОВНА – к.ф.-м.н., доцент Политехнического института (Школы), e-mail: boykola@dvfu.ru
КСЕНДЗЕНКО ЛЮДМИЛА СТЕПАНОВНА – к.ф.-м.н., доцент Школы естественных наук, SPIN: 2353-4426, e-mail: ksendzenko@mail.ru
Дальневосточный федеральный университет
Владивосток, Россия

Расчет нормальных температурных напряжений в компонентах асфальтобетона методами статистической механики композитов

Аннотация: Учет температурных напряжений важен при выполнении расчетов на прочность дорожного покрытия. В данной статье приводятся результаты исследования распределения нормальных температурных напряжений для компонент асфальтобетона. Показано логарифмически нормальное распределение нормальных температурных напряжений для включения и распределение Гаусса для нормальных температурных напряжений связующего. Исследование проведено с применением теоретических методов статистической механики композитов, аналитических методов решения статистической краевой задачи механики композитов, математического моделирования, методов программирования в математическом пакете MathCad.

Ключевые слова: асфальтобетон, температурные напряжения, статистическая краевая задача механики композитов, математическое моделирование, пакет программ.

Введение

Современное состояние российских автомобильных дорог, протянувшихся на многие тысячи километров и эксплуатируемых в различных природно-климатических зонах, обуславливает необходимость повышения качества дорожного покрытия, следовательно и асфальтобетонных материалов. Один из способов – совершенствование методов исследования таких материалов. Имеется ряд объективных факторов, влияние которых ухудшает состояние дорожных покрытий и способствует их разрушению: прежде всего сезонные и суточные перепады температур. Отрицательное влияние резкого изменения градиента температур ведет к увеличению частоты ремонтных работ, что экономически неэффективно.

Конструирование и расчет дорожных одежд – той части автомобильной дороги, которая укладывается на земляное полотно в пределах проезжей части, – весьма трудоемкий и ответственный процесс. Он связан с безопасностью и непрерывностью перемещения транспортных средств. В последнее время в строительстве дорог стали использовать асфальтобетонные покрытия. Основная причина разрушения асфальтобетона – появление трещин, образование которых происходит в основном из-за природно-климатического фактора, в частности изменения температуры воздуха. Поэтому актуальной является задача о расчете температурных напряжений вследствие воздействия градиента температур. Особенно полезен на практике расчет распределения температурных напряжений в компонентах асфальтобетона, кото-

рый используется при формулировке критерия прочности асфальтобетонного покрытия. Естественно, что при этом учитываются и другие факторы влияния на прочность асфальтобетона.

Следующие причины разрушения асфальтобетона – передозировка битума, недостаточное уплотнение и перемешивание бетонной смеси и как следствие – явление температурных трещин. С течением времени происходит «старение» асфальтобетона и наступает «выпотевание битума», т.е. испарение масел, входящих в состав битума. Интенсивность процесса испарения масел зависит от температуры их кипения, величины поверхности испарения, упругости паров, насыщающих пространство над автострадой. Происходят химические изменения компонентов битума с образованием новых высокомолекулярных органических соединений. Известно, что при тепловом воздействии, при солнечном свете и механическом воздействии активируются процессы окисления, что приводит к образованию свободных радикалов, происходит деструкция высокомолекулярных углеводородов, входящих в состав битума. Процесс старения переходит в начальную стадию разрушения с появлением температурных трещин. Более того, принято считать, что разрушение целостности покрытия начинается уже тогда, когда происходит потеря прочности вследствие возникновения пластических деформаций за пределами упругого разрушения.

Новый интересный подход к изучению температурных напряжений в компонентах асфальтобетона – применение методов статистической механики композитов. Теория статистической механики композитов, достаточно полно изложенная в монографии С.Д. Волкова и В.П. Ставрова [2], получила дальнейшее развитие в работах [1, 4]. Авторами [3] разработан алгоритм и программный комплекс по моделированию микроструктур композиционных материалов и расчёту их напряжённо-деформированного состояния. Показаны возможности алгоритма по созданию разнообразных микроструктур за счёт варьирования некоторых структурных параметров управления, задаваемых по различным законам статистического распределения.

Развитие вероятностных моделей нерегулярных структур композитов со статистическим разбросом различных параметров представлено в [5, 8].

В монографии В.А. Ломакина [5] излагаются статистические методы описания напряженного и деформированного состояний твердых тел. Демонстрируются методы постановки и решения линейных и нелинейных задач при случайных внешних воздействиях, а также расчеты на прочность квазистатически деформируемых тел, подверженных воздействию случайных сил, температур, граничных условий и структуры материала.

Современное состояние и дальнейшее развитие методов решения стохастических краевых задач механики композитов на основе структурных локально-эргодических моделей микронеоднородной среды рассматривается в [6]. Получены новые аналитические формулы для расчета эффективных упругих модулей с учетом естественного разброса свойств матрицы, а также аналитические формулы для расчета полей деформирования в квазиизотропных композитах.

В [7] предложен структурно-феноменологический подход к прогнозированию упругих свойств стохастических композитов. Впервые нелинейные структурно-феноменологические модели механики композитов применены к прогнозированию эффективных свойств стохастических композитов с полимерными матрицами, наполненными жёсткими сферическими включениями.

В работе А.А. Панькова [8] исследуются вероятностные модели нерегулярных структур композитов со статистическими разбросами размеров, формы и упругих свойств фаз включений. Предлагается новый метод статистической механики композитов – обобщенный метод самосогласования. В частности, приведены постановки, схемы решения краевых задач теории упругости, численные алгоритмы и приложения к расчету эффективных упругих свойств композитов со случайными структурами, а также к решению задач неупругого деформирования композитов с учетом накопления повреждений в матрице вблизи межфазных поверхностей волокон. Краткое введение в основные аспекты микромеханики сплошных сред, в

том числе композитных, предложено в [9]. Обсуждаются некоторые основные вопросы и стратегии моделирования, используемые для статических и квазистатических задач в континуальной микромеханике материалов. Основной упор делается на прикладные инженерные аспекты. Рассматриваются аналитические и численные методы моделирования термомеханического и теплофизического поведения микроструктурированных материалов. Несомненный интерес представляет предложенный автором обширный список источников по исследованию композитных материалов на основе различных моделей, в том числе и стохастических.

Постановка задачи

Верхний слой дорожной одежды в большинстве случаев состоит из насыпного и утрамбованного дробленого щебня, покрытого слоем асфальтовой смеси или битума, причем этот слой запрессовывается в щебеночную массу и играет роль соединительного элемента для разбросанного щебня. Так образуется асфальтобетон.

Согласно технологии укладки асфальтобетона процесс заполнения связующим должен производиться при температуре не ниже 75 °С, затем в естественных условиях происходит медленное остывание этой смеси до получения монолитной неоднородной среды.

Для улучшения адгезии между щебнем и асфальтовым наполнителем в смесь вводят различные химические добавки. Поэтому в общем случае асфальтобетон является многокомпонентной средой. Для расчета температурных напряжений примем следующие упрощения. Среда рассматривается как двухкомпонентная: первый компонент – наполнитель, второй – асфальтовая смесь, или жидкий битум.

В рассматриваемой задаче наполнителем является щебень, а связующим – битум. Для простоты предположим, что щебень имеет сферическую форму, хотя его промышленная фракция реализуется в виде кубов с ребром 3–5 мм.

В рабочем состоянии каждый из компонентов является изотропной средой и деформируется упруго, вплоть до разрушения. Предполагается, что слой асфальтобетонного дорожного покрытия в плоскости сечения, параллельной поверхности покрытия, является изотропной средой. В среднем толщина асфальтобетонного слоя изменяется в пределах 7,5–10 см.

Щебеночные включения распределены в битумном связующем случайным образом. Поэтому мы можем представлять среду асфальтобетонной смеси в виде одной из предложенных в [2] стохастических моделей двухкомпонентной неоднородной среды.

Коэффициент заполнения области задаем таким образом, чтобы включения круглой формы, расположенные стохастически, разве что касались друг друга, но не пересекались. Элементы щебеночного наполнителя расположены в плоскости случайным образом так, что в сечении, описанном выше, образуют плоскую область с кругами одинакового радиуса, расположение кругов случайное (рис. 1).

На рис. 1 показано модельное поле структуры асфальтобетона. Теория компьютерного моделирования структуры стохастического композитного материала, процессов деформирования и разрушения композитов, а также методов решения статистических краевых задач на основе этих моделей развита в [3, 6, 7]. Однако статистическая краевая задача в [7] решается в моментных функциях в отличие от метода реализаций, который применяется для решения этой задачи в нашей работе.

Цель работы состоит в получении значений нормальных температурных напряжений в компонентах асфальтобетона путем решения статистической краевой задачи механики композитов. Для моделирования структуры необходимо решить задачу о заполнении плоской области случайными кругами одинакового радиуса с заранее заданной плотностью заполнения. В точках модели структуры необходимо вычислить значения нормальных температурных напряжений в наполнителе и связующем, затем проверить гипотезу о законах их распределения.

Рис. 1. Образец модельного поля структуры асфальтобетона.
Здесь и далее рисунки авторов.

Модель, которая рассматривается нами, можно получить либо из эксперимента, либо методами математического моделирования, решая задачу о случайном заполнении плоской области кругами одинакового радиуса с заранее заданной плотностью заполнения.

Модель подобной двухкомпонентной композитной среды исследовалась ранее применительно к волокнистым однонаправленным композитам. В данной статье вводится коэффициент заполнения среды p , который равен процентному содержанию наполнителя. Ввиду случайного расположения включений в связующем имеет место статистический подход к вычислению как упругих свойств в любой точке среды, так и напряжений. При этом ставится и решается статистическая краевая задача механики композитов [2].

Математическая модель задачи и ее решение

Дана система уравнений

$$\nabla \cdot \bar{\sigma} = 0, \quad \bar{\varepsilon} = \text{def } \bar{\chi}, \quad \bar{\sigma} = \bar{C} \cdot \cdot (\bar{\varepsilon} - \alpha t). \quad (1)$$

При заданных на границе S области V условиях:

$$\bar{\chi}(\bar{x})|_S = \chi_S(\bar{x}). \quad (2)$$

Уравнения (1) представляют собой уравнения равновесия, рассматриваемые далее без объемных сил; геометрические соотношения теории деформаций и физические уравнения термоупругости. В совокупности они образуют основную систему уравнений статистической краевой задачи термоупругости. Здесь $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ – случайные тензоры напряжений и деформаций, $\bar{\chi}$ – случайный вектор перемещений, $\bar{C}$ – детерминированный тензор модулей упругости, ∇ – дифференциальный оператор Гамильтона, α – макроскопический тензор коэффициентов линейного расширения, t – детерминированная разность температур напряженного состояния и эксплуатации, def – оператор деформации, где $\text{def} = \frac{1}{2}[\nabla + \nabla^*]$, символ $*$ означает транспонирование. Примем дополнительно следующие гипотезы: объемные силы отсутствуют, перемещения на границе S детерминированы; флуктуации перемещения на границе равны нулю. Пользуясь гипотезой континуума [9] сплошной кусочно-однородной среды, будем считать, что при переходе через границу раздела сред напряжения изменяются непрерывно. Также предполагается идеальный термомеханический контакт на границе сред.

Решение задачи (1), (2) осуществляется методом функций Грина. Принимаем тензор Грина известным. Тогда для вычисления нормальных температурных напряжений в изотропной среде сечения, параллельного плоскости дорожного покрытия, достаточно рассмотреть только одну компоненту тензора Грина, общий вид которого приведен в работе [2]. Эта формула имеет вид:

$$G_{ij}(\bar{x}, \bar{x}') = M \ln r + N \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{r^2}, \quad (i, j = 1, 2), \quad (3)$$

$$\text{где } M = -\frac{l+3m}{4\pi m(l+2m)}, \quad N = -\frac{l+m}{4\pi m(l+2m)}.$$

Здесь l, m – средние значения постоянных Ламе; $r = |\bar{x} - \bar{x}'|$, где $\bar{x}, \bar{x}'$ – радиус-векторы двух точек рассматриваемой среды. Решение задачи (1), (2) относительно флуктуации деформаций $\bar{\varepsilon}_0$ можно записать в виде системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\bar{\varepsilon}^0(\bar{x}) = \text{def} \int_V G(\bar{x}, \bar{x}') \cdot (\nabla \cdot \Pi)' dV'. \quad (4)$$

Здесь $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon} - \bar{e}$, где $\bar{e} = \langle \bar{\varepsilon} \rangle$ – среднее значение тензора деформаций, $\langle \dots \rangle$ означает осреднение случайной величины;

$$\Pi = \Pi^* + \bar{C}^0 \cdot \bar{\varepsilon}^0, \quad \bar{C}^0 = \bar{C} - \langle \bar{\varepsilon} \rangle, \quad \Pi^* = \bar{C} \cdot (\bar{e} - \bar{\alpha} t) - \text{свертка тензоров}.$$

Решая систему (4) методом последовательных приближений, в первом приближении получим:

$$\bar{\varepsilon}_1^0(\bar{x}) = \text{def} \int_V \bar{G}(\bar{x}, \bar{x}') \cdot (\nabla \cdot \Pi^*)' dV', \quad (5)$$

где тензор $\Pi^* = R \cdot \lambda^0$, $R = \bar{C}^* \cdot \alpha - 3n^* E$, $\bar{C}^* = \bar{C}^{(1)} - \bar{C}^{(2)}$, $n^* = K^{(1)} \alpha^{(1)} - K^{(2)} \alpha^{(2)}$, $E = (\delta_{ij})$.

Здесь $\bar{C}^{(1)}, \bar{C}^{(2)}$ – средние модулей упругости в компонентах, $K^{(1)}, K^{(2)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ – модули объемной деформации и коэффициенты линейного расширения компонентов; $\lambda^0 = \lambda - P$, где λ – единичная индикаторная функция случайного поля структуры, $P = \langle \lambda \rangle$.

Интегрирование в (5) распространяется на макроскопическую окрестность точки $M(\bar{x})$. Имея реализацию случайного поля структуры $\lambda_k(\bar{x})$ физических свойств компонентов $\bar{C}(\bar{x})$ и $\bar{\alpha}(\bar{x})$, можно получить реализацию случайного поля флуктуаций деформаций $\bar{\varepsilon}_1^0(\bar{x})$.

С учетом (3), вычисляя только те значения компонент тензора напряжений, которые соответствуют нормальным напряжениям [4], получим окончательную формулу для вычисления начальных нормальных напряжений в компонентах асфальтобетона:

$$P_{11}^{(s)} = \left\{ 2 \left(l^{(s)} + m^{(s)} \right) a_{11}^0 + m^{(s)} a_{33}^0 + \left[\left(l^{(s)} + 2m^{(s)} \right) I_{11\alpha\alpha} + 3m^{(s)} I_{22\alpha\alpha} \right] \cdot \left[2 \left(l^* + m^* \right) a_{11}^0 + m^* a_{33}^0 \right] - 3k^{(s)} a^{(s)} \right\} \cdot t. \quad (6)$$

Здесь индекс s принимает значения 1 и 2. Цифра 1 указывает на принадлежность рассматриваемой точки первому компоненту – будем считать его щебнем. Цифра 2 означает принадлежность точки второму компоненту – битуму. Здесь l, m – постоянные Ламе с соответствующими индексами, a_{ij}^0 – макроскопические коэффициенты линейного расширения; $k^{(s)}$ – модули объемной деформации компонентов, l^*, m^* – приведенные постоянные Ламе, которые

вычисляются по формулам: $l^* = pl^{(1)} + (l-p)l^{(2)}$, $m^* = pm^{(1)} + (l-p)m^{(2)}$, где p – процентное содержание наполнителя в композите; t – детерминированная разность температур ненапряженного состояния и эксплуатации. Свертки тензоров $I_{11\alpha\alpha}$, $I_{22\alpha\alpha}$ для среды с круговой формой включений вычислены в [2].

Величины $I_{ii\alpha\alpha}$ представляют собой значения интегралов по контурам включений – в данном случае окружностей, E , ν – модули упругости и коэффициенты Пуассона соответственно для включения и связующего. Формулы для вычисления макроскопических коэффициентов линейного расширения вычисляются через макроскопические модули упругости компонентов и не приводятся ввиду их громоздкости. Полностью эти формулы приведены в основополагающей работе С.Д. Волкова и В.П. Ставрова [2].

Результаты и их обсуждение

Расчет значений температурных напряжений проведен при следующих параметрах: модули Юнга $E^{(1)} = 0,5 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$, $E^{(2)} = 0,11 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$; коэффициенты Пуассона $\nu^{(1)} = 0,22$; $\nu^{(2)} = 0,25$; коэффициенты линейного расширения компонентов $\alpha^{(1)} = 0,3 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$; $\alpha^{(2)} = 30 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$; $t = 20^\circ\text{C}$, содержание наполнителя в композите – 60%.

Расчеты проведены с использованием математического пакета MathCad. На основе формулы (6) получены кривые распределения нормальных начальных температурных напряжений для наполнителя и связующего (рисунки 2, 3).

Вид гистограммы относительных частот (рис. 2) позволяет выдвинуть гипотезу: изучаемая непрерывная случайная величина – напряжение в наполнителе подчиняется логнормальному закону.

Для связующего распределение нормальных начальных температурных напряжений подчиняется нормальному закону (рис. 3). Справедливость выдвинутых гипотез проверена с помощью критерия согласия χ^2 .

Наши заключения согласуются с полученными ранее выводами о распределении температурных напряжений в компонентах неоднородных сред с включениями круглой формы.

Впервые установлены результаты, позволяющие увидеть законы распределения и накопить знания о тех процессах, которые происходят в асфальтобетоне на уровне структурных элементов. Имеются ввиду механизмы возникновения и развития разрушения, характерные для рассматриваемых композитных систем, их взаимосвязь со структурными, геометрическими и механическими свойствами компонентов.

Выполненные нами кривые на рисунках 2 и 3 позволяют понять, как распределены по объему асфальтобетона возникающие в структурных элементах усилия, формирующие силы сопротивления внешней нагрузке. Знание распределения этих усилий имеет наибольший практический интерес, так как напрямую связано с прочностным поведением структурно-неоднородного материала, каким является асфальтобетон.

Практически предлагаемый метод позволяет провести расчет термоупругих напряжений на модели и получить результат с помощью формальной процедуры применения доступной математической программы. Решение задачи дает возможность оценить опасность того или иного значения температуры внешней среды для прочности всего дорожного покрытия и изменять состав асфальтобетонной смеси в зависимости от процентного содержания и свойств компонентов. Достоверность результатов обеспечивается корректным использованием соотношений статистической механики композитных материалов и математических методов расчета.

Рис. 2. Гистограмма относительных частот значений натуральных логарифмов напряжений в наполнителе (1); график плотности логнормального распределения напряжений в наполнителе (2).

Рис. 3. Гистограмма относительных частот значений напряжений в связующем (1); график плотности нормального распределения напряжений в связующем (2).

Выводы

На основании изложенных выше модельных и аналитических исследований можно сделать следующие выводы.

Асфальтобетонный слой представляет собой композитный материал, его структура моделируется кусочно-однородной непрерывной средой, удовлетворяющей требованиям статистической модели. Для такой среды можно поставить и решить статистическую краевую задачу термоупругости механики композитов. Методы решения статистических краевых задач термоупругости механики композитов применимы к модели асфальтобетона. При этом в решении необходимо учесть механические характеристики компонентов асфальтобетона.

Полученное решение позволяет найти численное значение напряжений в компонентах, отдельно в наполнителе и в связующем, а также провести статистическую обработку результатов. Показано, что в пределах климатических температур распределения напряжений согласуются с общей картиной распределения термоупругих напряжений в композитных средах. Изменяя значения параметров задачи, можно получить кривые распределения при изменении климатических условий, что в дальнейшем позволит нам сформулировать как критерии прочности, так и оптимальный состав структуры изучаемого композитного материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойко Л.А., Ксендзенко Л.С., Василенко Н.Ю., Баева Т.А. Зависимость температурных напряжений в компонентах стекловолоконного композита от процентного содержания стеклянных волокон в материале // Вестник Инженерной школы ДВФУ. 2013. № 4(17). С. 76–81. URL: <https://www.dvfu.ru/vestnikis/archive-editions/4-17/11/> (дата обращения: 20.07.2019).
2. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. Минск: Изд-во БГУ им. Ленина, 1978. 206 с. URL: <http://www.alib.ru> (дата обращения: 18.07.2019).
3. Ильиных А.В., Радионова Н.В., Вильдеман В.Э. Компьютерный синтез и статистический анализ распределения структурных характеристик зернистых композиционных материалов // Механика композиционных материалов. 2010. Т. 16, № 2. С. 251–264.
4. Лаврушина Е.Г., Бойко А.А. Распределение температурных напряжений в дорожных покрытиях // Строительные материалы. 2009. № 11. С. 74–75.
5. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Ленанд, 2014. 144 с.
6. Макарова Е.Ю., Соколкин Ю.В. Нелинейные и многоуровневые модели механики деформирования и разрушения композитов // Механика композитных материалов и конструкций. 2013. Т. 19, № 3. С. 395–405.
7. Макарова Е.Ю., Соколкин Ю.В., Чекалин А.А. Структурно-феноменологические модели прогнозирования упругих свойств высокопористых композитов // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-математ. науки. 2010. Вып. 5(21). С. 276–279.
8. Паньков А.А. Методы самосогласования механики композитов: монография. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. 253 с.
9. Böhm H.J. A short introduction to basic aspects of continuum micromechanics. Vienna, Institute of Lightweight Design of structural Biomechanics (ILSB), Vienna Univ. of Technology, 2019, 187 p.

DOI: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-3-2>

Boyko L., Ksendzenko L.

LIUDMILA BOYKO, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Politechnical Institute, e-mail: boyko.la@dvfu.ru

LIUDMILA KSENDZENKO, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, School of Natural Sciences, e-mail: ksendzenko@mail.ru

Far Eastern Federal University

Vladivostok, Russia

Calculation of normal temperature stresses in components of asphalt concrete by methods of statistical mechanics of composites

Abstract: Consideration of temperature stresses is important when performing calculations of road surface strength. The results of study of the distribution of temperature stresses components for asphalt concrete are given herein. Lognormal distribution of components of thermal stresses for inclusion and normal distribution of components for thermal stresses of the binding agent are shown. The study was carried out using theoretical methods of mechanics of composites, analytical methods for solving the statistical boundary value problem of mechanics of composites, numerical and experimental modelling, programming methods in the mathematical package MathCad.

Keywords: asphalt concrete, temperature stresses, statistical boundary value problem, mechanics of composites, numerical experiment, laboratory experiment.

REFERENCES

1. Boyko L.A., Ksendzenko L.S., Vasilenko N.Yu., Baeva T.A. The dependence of temperature stresses in the components of a fiberglass composite on the percentage of glass fibers in the material. FEFU: School of Engineering Bulletin. 2013(17):76–81. URL: <https://www.dvfu.ru/vestnikis/archive-editions/4-17/11/> – 20.07.2019.
2. Volkov S.D., Stavrov V.P. Statistical mechanics of composite materials. Minsk, Publishing House of BSU Lenin, 1978, 206 p. URL: <http://www.alib.ru> – 18.07.2019.
3. Ilyinykh A.V., Radionova N.V., Vildeman V.E. Computer synthesis and statistical analysis of the distribution of structural characteristics of granular composite materials. Mechanics of composite materials. 2010;16(2):251–264.
4. Lavrushina E.G., Boyko L.A. Distribution of temperature stresses in pavements. Stroitel'nye Materialy. 2009;11:74–75.
5. Lomakin V.A. Statistical problems of mechanics of solid deformable bodies. M., Publisher Lenand, 2014, 144 p.
6. Makarova E.Yu., Sokolkin Yu.V. Nonlinear and multilevel models of the mechanics of deformation and fracture of composites. Mechanics of composite materials and structures. 2013;19(3):395–405. Makarova E.Yu., Sokolkin Yu.V., Chekalin A.A. Structural-phenomenological models for predicting the elastic properties of highly porous composites. Bulletin of the Samara State. Tech. University, Series of 7. Physical and Mathematical Sciences. 2010;(21):276–279.
8. Pankov A.A. Self-consistency methods of the mechanics of composites: monograph. Perm, Publishing House Perm. State Tech. Univ., 2008, 253 p.
9. Böhm H.J. A short introduction to basic aspects of continuum micromechanics. Vienna, Institute of Lightweight Design of Structural Biomechanics (ILSB), Vienna Univ. of Technology, 2019, 187 p.