Механика деформируемого твердого тела

DOI: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-3-1>
УДК 539.32

Э.В. Сёмка

СЁМКА ЭЛЕОНОРА ВИКТОРОВНА – преподаватель Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил, SPIN: 5317-5478, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0194-6979>, e-mail: semka_elya@mail.ru
Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина
Воронеж, Россия

Упругопластическое состояние полого шара

Аннотация: Для модели сжимаемого идеального изотропного упругопластического тела рассмотрена задача о полой сфере, на внешнюю и внутреннюю границы которого заданы разные давление и температура. Решается несвязанная задача в рамках теории малых деформаций. Принимается, что полные деформации равны сумме упругих и пластических деформаций, пластические деформации и напряжения связаны соотношениями ассоциированного закона течения. Упругие деформации определяются из соотношений закона Дюамеля–Неймана. Выбирается условие пластичности, не зависящее от первого инварианта тензора напряжений. При определении напряжения и деформации в пластической области рассматривается квазистатический подход, т.е. не указывается закон изменения внешних параметров воздействия (давление и температура на границах шара) до значений, принимаемых при вычислениях.

В настоящей работе определены границы изменения перепада давления и температуры, для которых шар будет находиться в упругом состоянии. Установлено, что в зависимости от значений внешних параметров воздействия пластическая зона может зарождаться на внутренней или на внешней границе шара, или на внутренней и внешней границах одновременно, или между границами шара. В качестве примера приведены графики распределений напряжений, деформаций, перемещений, когда пластическая зона занимает некоторую часть, расположенную между внутренней и внешней границей шара. Приводятся графики годографа напряжений, которые являются элементами верификации решения задачи.

В настоящей работе учитывается внешнее и внутреннее давление на полый шар, а также температура внешней и внутренней границы шара, что приводит к более общей постановке задачи и необходимости построения разных алгоритмов ее решения. Также определены области изменения внешних параметров, при которых полый шар находится в определенном состоянии.

Ключевые слова: упругопластическое тело, теория пластического течения, температурные напряжения, полый шар, допустимые значения внешних параметров, термоупругопластичность, упругопластическая граница, эквивалентное напряжение.

Введение

Задача о шаре – составная часть трудов по механике твердого деформируемого тела [12] – рассматривалась рядом авторов в разных постановках [1–7, 10, 11]. Интерес к данной задаче обусловлен широким практическим применением сферических оболочек, а также вопросами, которые возникают в процессе математического моделирования подобного рода объектов и при построении алгоритмов и комплексов программ для получения численных результатов. Упругое состояние полого шара, испытывающего внутреннее давление и температурное воздействие, рассмотрено в [12], а в [1] исследуется процесс накопления необра-

© Сёмка Э.В., 2020

О статье: поступила: 05.05.2020; финансирование: Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина.

тимых деформаций в материале сферического слоя под действием изменяющегося со временем всестороннего давления. В [2–7] приведено решение упругопластической задачи о полом шаре для разных вариантов теплового воздействия. В работе [11] дано решение задачи о толстостенной сферической оболочке для изотропно упрочняющегося материала. В [4] предложен метод расчета накопленных необратимых деформаций в процессе нестационарного теплового воздействия. В силу незначительного влияния тепловых эффектов, возникающих при нециклическом нагружении, в подавляющем большинстве работ решается несвязная задача [1–7, 10–12]. В основном определение напряжений и деформаций в полом шаре проводилось, когда внешнее давление на шар было равно нулю. Такое предположение уменьшает число внешних параметров [8], что не позволяет учесть некоторые варианты развития пластических областей в шаре.

В целом обзор трудов, посвященных исследованию напряженно-деформированного состояния твердого тела, показывает, что определение напряжений и деформаций в полом шаре проводилось, как правило, при температурном воздействии [2–7, 9–12] или под действием только внутреннего давления [1].

Цель данной статьи – определение границ внешних параметров, когда объект находится в определенном состоянии, допускаемом выбранной математической моделью.

Постановка задачи

Выбирается сферическая система координат ρ, θ, φ , начало которой совпадает с центром шара. Рассматривается полярно симметричное внешнее воздействие на полый шар. На внутреннюю границу $\rho = a$ действует давление p_a , на внешнюю границу $\rho = b$ – давление p_b . Также задана температура внутренней T_a и внешней T_b границы шара. Необходимо установить границы зарождения пластических зон, найти напряжения и деформации в шаре, находящемся в упругопластическом состоянии. Также необходимо установить соотношения, которым должны удовлетворять внешние параметры при зарождении пластических зон. Рассматривается несвязная задача.

Поле температур

Поле температур в шаре находится из решения краевой задачи [12]:

$$\begin{cases} \rho \frac{d^2 T}{d\rho^2} + 2 \frac{dT}{d\rho} = 0, \\ T|_{\rho=a} = T_a, \quad T|_{\rho=b} = T_b. \end{cases} \quad (1)$$

Решение задачи (1) представим в виде

$$T = T_b + \frac{ab\Delta T}{(b-a)\rho}, \quad \Delta T = T_a - T_b. \quad (2)$$

Основные соотношения

В сферической системе координат ρ, θ, φ , при учете теплового воздействия и давления на внешней и внутренней границах шара, основные соотношения имеют вид:

– уравнение равновесия

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta) = 0, \quad (3)$$

– линейная зависимость полных деформаций от перемещений

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}, \quad (4)$$

– условие совместности полных деформаций

$$\rho \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0, \quad (5)$$

– условие пластичности

$$f(tr\boldsymbol{\sigma}, tr\mathbf{s}^2, tr\mathbf{s}^3) = 0, \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\mathbf{s}$ – девиатор напряжений;

нормальный закон связи приращений пластических деформаций и напряжений

$$\frac{d\varepsilon_\theta^p}{\partial f / \partial \sigma_\theta} = \frac{d\varepsilon_\rho^p}{\partial f / \partial \sigma_\rho}. \quad (7)$$

Полные деформации складываются из упругих и пластических

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p. \quad (8)$$

Упругие деформации определяются из соотношений закона Дюамеля–Неймана

$$E\varepsilon_\rho^e = \sigma_\rho - 2\nu\sigma_\theta + E\alpha T, \quad E\varepsilon_\theta^e = \sigma_\theta - \nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta) + E\alpha T, \quad (9)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, α – коэффициент теплового расширения.

Термоупругое состояние сферической оболочки

Напряжения, деформации и перемещения в шаре, находящемся в упругом состоянии, определяются по формулам [12]:

$$\sigma_\rho = A + \frac{B}{\rho^3} - \frac{\lambda \Delta T}{\rho}, \quad \sigma_\theta = A - \frac{B}{2\rho^3} - \frac{\lambda \Delta T}{2\rho}, \quad (10)$$

где $\lambda = \frac{abE\alpha}{(1-\nu)(b-a)}$, $\Delta T = T_b - T_a$.

Если весь шар находится в упругом состоянии, то, учитывая граничные условия,

$$\sigma_\rho|_{\rho=a} = -p_a, \quad \sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b,$$

находим, что

$$A = \frac{a^3 p_a - b^3 p_b - \lambda(b^2 - a^2)}{b^3 - a^3}, \quad B = \frac{a^3 b^3 (p_b - p_a) - \lambda a^2 b^2 (b - a)}{b^3 - a^3}.$$

Если в упругом состоянии находится часть шара, то алгоритм вычисления величин A и B , которые обычно называются константами интегрирования, зависит от того, где расположены упругая и пластическая области. Если упругая зона примыкает к внутренней или внешней границе шара, то A, B можно находить из граничных условий и условий непрерывности напряжений на упругопластической границе. Если упругая зона расположена между пластическими зонами, то A, B будут определяться из условия непрерывности напряжений на упругопластических границах.

Условие пластичности

Если функция пластичности не зависит от первого инварианта тензора напряжений $tr\boldsymbol{\sigma}$ и не учитывается знак третьего инварианта девиатора напряжений $tr\mathbf{s}^3$ ($\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}/3$), то в силу равенства окружного и меридионального напряжений $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ все функции пла-

стичности для идеального пластического тела сводятся к разности меридианного и окружного напряжений. Следовательно, условие пластичности можно представить в виде

$$(\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho})^2 = k^2, \quad (11)$$

где k – предел пластичности.

Следует иметь в виду, что при рассмотрении ассоциированного закона пластического течения левая часть равенства (11) не является пластическим потенциалом.

Ассоциированный закон пластического течения

Следствием ассоциированного закона пластического течения в рассматриваемом случае будет условие несжимаемости пластических деформаций:

$$\varepsilon_{\rho}^p + 2\varepsilon_{\theta}^p = 0,$$

где ε^p – пластическая деформация.

Пластическая область

Напряжения в пластической зоне определяются из уравнения равновесия (3) и условия пластичности (11). Обозначим через p_c давление на упругопластической границе $\rho = c$ $a \leq \rho \leq b$, тогда

$$\sigma_{\rho} |_{\rho=c} = -p_c. \quad (12)$$

Решая задачу Коши (3), (12), находим

$$\sigma_{\rho} = -p_c \pm 2k \ln(\rho/c), \quad \sigma_{\theta} = \pm k - p_c \pm 2k \ln(\rho/c). \quad (13)$$

Выбор знака в (13) определяется в ходе решения упругопластической задачи и зависит от граничных условий.

Для оценки напряженного состояния в упругой области введем эквивалентное напряжение, равное выбранной функции пластичности.

Эквивалентное напряжение

В области упругого состояния эквивалентное напряжение σ_{eq} совпадает с функцией пластичности. В точке, находящейся в упругом состоянии, процесс нагружения определяется увеличением значения эквивалентного напряжения, процесс разгрузки – уменьшением значения эквивалентного напряжения, а процесс нейтрального нагружения происходит при фиксированном значении эквивалентного напряжения.

Если функция пластичности не зависит от $tr \sigma$ и является четной функцией относительно кубического инварианта девиатора напряжений, то

$$\sigma_{eq} = |\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}|. \quad (14)$$

Приращения необратимых деформаций связаны с напряжениями нормальным законом (7).

Учитывая формулы (10), (14), находим

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{2} \left| \frac{3a^2b^2(ab\Delta p - (b-a)\lambda\Delta T)}{(b^3 - a^3)\rho^3} + \frac{\lambda\Delta T}{\rho} \right|. \quad (15)$$

Можно отметить, что эквивалентное напряжение зависит от разности давлений $\Delta p = p_a - p_b$ и разности температур $\Delta T = T_a - T_b$. Исследование функции (15) показывает, что наибольшее значение эквивалентное напряжение может принимать или на границе

$\rho = a$, или на границе $\rho = b$, или на границах $\rho = a$ и $\rho = b$ одновременно, или в точке максимума функции $\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\rho)$.

Радиальная координата ρ_m наибольшего значения σ_{eq} зависит от значения внешних параметров Δp , ΔT , a , b , а также от материальных констант E , α и ν . Несложные вычисления показывают, что координата максимума функции σ_{eq} (15) определяется по формуле

$$\rho_m = 3ab \sqrt{\frac{(b-a)\lambda\Delta T - ab\Delta p}{\lambda\Delta T(b^3 - a^3)}}.$$

Область допустимых значений внешних параметров

Поскольку состояние объекта, определяемое его внутренними параметрами, зависит от параметров внешних, то при построении алгоритма решения задачи необходимо знать, при каких значениях внешних параметров та или иная точка рассматриваемого объекта будет находиться в упругом или пластическом состоянии [8]. В работе [8] было показано, как зависят допустимые значения внешних параметров от значения материальных констант. Области значений внешних параметров, когда весь шар находится в упругом состоянии, соответствуют все точки внутренней области, изображенной на рис. 1. Если значения внешних параметров Δp и ΔT определяются координатами точек границы (рис. 1), то происходит зарождение пластической области на одной из границ шара, или между внешней и внутренней границами шара, или одновременно на обеих его границах. Область допустимых значений Δp и ΔT , когда шар находится в упругом состоянии, определяется из условия (16):

$$\max\{\sigma_{eq}|_{\rho=a}, \sigma_{eq}|_{\rho=b}, \sigma_{eq}|_{\rho=c}\} = k. \quad (16)$$

Рис. 1. Область допустимых значений для перепада температуры и давления для упругого состояния шара: а) $a = 0.7$; $b = 1$; $\nu = 0.2$; $E\alpha = 0.012$; б) $a = 0.4$; $b = 1$; $\nu = 0.2$; $E\alpha = 0.012$.

Обсуждение результатов

Были выполнены численные расчеты напряжений, деформаций, перемещений, эквивалентного напряжения, а также построение годографа напряжений для сферической оболочки при заданном значении упругопластической границы, при изменении параметров управления T_a , T_b , p_b , p_a . Результаты показаны на рисунках 2–5. Все величины приводились к безразмер-

ному виду. За масштаб длины принимался внешний радиус шара. Все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к пределу пластичности при одноосном растяжении.

Рис. 2. Полные деформации, перемещения:

a) $k=1$; $a=0.5$; $b=1$; $\nu=0.3$; $p_b=0$; $c_1=0.7$; $c_2=0.89$; $T_b=0$; $T_a=140$;

b) $k=1$; $a=0.5$; $b=1$; $\nu=0.3$; $p_a=0$; $c_1=0.7$; $c_2=0.99$; $T_b=0$; $T_a=150$.

Рис. 3. Пластические деформации:

a) $k=1$; $a=0.5$; $b=1$; $\nu=0.3$; $p_b=0$; $c_1=0.7$; $c_2=0.89$; $T_b=0$; $T_a=140$;

b) $k=1$; $a=0.5$; $b=1$; $\nu=0.3$; $p_a=0$; $c_1=0.7$; $c_2=0.99$; $T_b=0$; $T_a=150$.

Рис. 4. Окружное, радиальное и эквивалентное напряжения:

- a) $k = 1$; $a = 0.5$; $b = 1$; $\nu = 0.3$; $p_b = 0$; $c_1 = 0.7$; $c_2 = 0.89$; $T_b = 0$; $T_a = 140$;
 b) $k = 1$; $a = 0.5$; $b = 1$; $\nu = 0.3$; $p_a = 0$; $c_1 = 0.7$; $c_2 = 0.99$; $T_b = 0$; $T_a = 150$.

Рис. 5. Упругие деформации:

- a) $k = 1$; $a = 0.5$; $b = 1$; $\nu = 0.3$; $p_b = 0$; $c_1 = 0.7$; $c_2 = 0.89$; $T_b = 0$; $T_a = 140$;
 b) $k = 1$; $a = 0.5$; $b = 1$; $\nu = 0.3$; $p_a = 0$; $c_1 = 0.7$; $c_2 = 0.99$; $T_b = 0$; $T_a = 150$.

Приведенные на рис. 1 графики показывают, что область значений параметров Δp , ΔT , для которых шар будет находиться в упругом состоянии, ограничена сплошной линией. Учет внешнего давления на полый шар показывает, что пластическая зона может зарождаться не только на внутренней, но и на внешней поверхности, а также в области между внутренней и внешней поверхностями полого шара (рисунки 2, 4, 5). Из численных результатов вид-

но, что при увеличении T_a увеличивается зона пластического состояния (рис. 3). Графики для годографа напряжений несут дополнительную информацию, которая позволяет верифицировать правильность вычислений (рис. 6).

Рис. 6. Годограф вектора напряжений:

- a) $k = 1; a = 0.5; b = 1; \nu = 0.3; p_b = 0; c_1 = 0.7; c_2 = 0.89; T_b = 0; T_a = 140;$
 b) $k = 1; a = 0.5; b = 1; \nu = 0.3; p_a = 0; c_1 = 0.7; c_2 = 0.99; T_b = 0; T_a = 150.$

Заклучение

Определение допустимых значений внешних параметров, характеризующих внешние воздействия на полый шар, который находится в упругом состоянии, будет справедливо и для других аналогичных задач.

В настоящей статье учитывается внешнее и внутреннее давление на полый шар, а также температура внешней и внутренней границы шара, что приводит к более общей постановке задачи и необходимости построения разных алгоритмов ее решения. А также определены области изменения внешних параметров, при которых полый шар находится в определенном состоянии. Дальнейшие направления исследований связаны с учетом пластической сжимаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галимзянова К.Н., Панченко К.Н. Применение различных моделей деформаций ползучести и пластичности к моделированию процесса деформирования сферического слоя // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. тр., Уфа, 19–24 авг. 2019 г. Уфа: Ред.-издат. центр Башкирского гос. ун-та, 2019. Т. 3. С. 287–289. URL: http://ruscongrmech2019.bashedu.ru/sites/default/files/trudy_sezda/tom_3_0.pdf?499 (дата обращения: 29.03.2020).
2. Дац Е.П., Мокрин С.Н., Мурашкин Е.В. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе нагрева-охлаждения упругопластического шара // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2012. № 4. С. 123–132. URL: <http://limit21.ru/upload/arhiv/14.pdf> (дата обращения: 28.03.2020).
3. Дац Е.П., Мокрин С.Н. О повторном нагреве сплошного упругопластического шара // Сб. тез. докл. XXXVI Дальневосточной математической школы-семинара имени академика Е.В. Золотова. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 106–109.
4. Дац Е.П., Мурашкин Е.В. Повторный нагрев термоупругопластического шара // Материалы X Междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2014), 25–31 мая 2014 г.

- Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2014. С. 137–139. URL: http://www.npnj.ru/files/npnj2014_web.pdf (дата обращения: 24.06.2020)
5. Дац Е.П., Мурашкин Е.В. Термоупругопластическое деформирование многослойного шара // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 5. С. 30–36.
 6. Дац Е.П., Мурашкин Е.В., Велмуруган Р. Вычисление необратимых деформаций в полом упругопластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2015. № 3. С. 168–175. URL: <http://limit21.ru/?do=online&vid=2&nom=214> (дата обращения: 29.03.2020).
 7. Сёмка Э.В. Определение допустимых значений параметров управления в задаче о шаре. Моделирование энергоинформационных процессов: Материалы VIII национальной науч.-практ. конф. Воронеж: ВГУИТ, 2020. С. 84–91. URL: http://old.vsuet.ru/science/conference2019/mat_24-26-12-2019.pdf (дата обращения: 30.03.2020).
 8. Aleksandrova N.N., Artemov M.A., Baranovskii E.S., Shashkin A.I. On stress/strain state in a rotating disk. AMCSM_2018 IOP. J. of Physics: Conf. Series. 2019(1203):71–80. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012001>
 9. Aleksandrova N.N. Efficiency of the Tresca yield criterion in modeling of annular plates with rigid constraint. Applied Mathematical Modelling. 2019;75:371–384. URL: <http://www.elsevier.com/locate/apm> – 30.03.2019.
 10. Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process. AIP Conference Proceedings. 2018, vol. 1959, N 1:070008. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5034683>
 11. Gamer U. On the elastic-plastic deformation of a sphere subjected to a spherically symmetrical temperature field. J. of Thermal Stresses. 1988;13:159–173.
 12. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. N.Y., McGraw-Hill, 1970, 506 p.

FEFU: SCHOOL of ENGINEERING BULLETIN. 2020. N 3/44

Mechanics of Deformable Solids

www.dvfu.ru/en/vestnikis

DOI: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-3-1>

Syomka E.

ELEONORA SYOMKA, Lecturer, Military Training and Scientific Center of the Air Force,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0194-6979>, e-mail: semka_elya@mail.ru,
Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarina
Voronezh, Russia

Elastoplastic state of a hollow sphere

Abstract: The problem of a hollow sphere with different pressure and temperature levels on the external and the internal boundaries has been considered for the model of an ideal compressible isotropic elastic body. An independent problem is solved within the theory of small strains. It is assumed that total deformations are equal to the sum of elastic and plastic deformations, plastic deformations and stresses are related by the relations of the associated flow law. Elastic deformations are determined by their correlation under the Duhamel-Neumann law. The plasticity condition which is independent of the first invariant of the stress tensor is considered. In determination of stress and strain in the plastic range a quasi-static approach is considered, that is, the law of changing the external parameters of the action (pressure and temperature at the boundaries of the sphere) to the values assumed in the calculations is not indicated.

In this article, the boundaries of the pressure drop and temperature for which the sphere will be in an elastic state are determined. It has been established that depending on the values of the external parameters of the impact, the plastic zone can occur on the inner or outer boundary of the sphere, or on the inner and outer boundaries simultaneously, or between the boundaries of the sphere. As an example, the graphs of the distributions of stresses, deformations, displacements when the plastic zone occupies a certain part located be-

tween the inner and outer boundary of the sphere are given. The stress hodograph graphs which are integral elements of verification of the solution of the problem are given.

Keywords: elastoplastic body, theory of plastic flow, temperature stresses, hollow sphere, permissible values of external parameters, thermoelastic elasticity, elastic-plastic boundary, equivalent stress.

REFERENCES

1. Galimzyanova K.N., Panchenko K.N. Application of various models of creep and ductility strains to modeling the process of deformation of a spherical layer. XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings. Ufa, August 19–24, 2019. Ufa: Editorial and Publishing Center of Bashkir State Univ., 2019, vol. 3, 287–289 p. URL: http://ruscongrmech2019.bashedu.ru/sites/default/files/trudy_sezda/tom_3_0.pdf?499 – 29.03.2020.
2. Dats E.P., Mokrin S.N., Murashkin E.V. Calculation of accumulated residual deformation during heating-cooling of an elastic-plastic ball. Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Yakovlev. Series *Limit State Mechanics*. 2012;4:123–132. URL: <http://limit21.ru/upload/arhiv/14.pdf> – 28.03.2020.
3. Dats E.P., Mokrin S.N. On reheating of a continuous elastoplastic ball. Abstracts of papers XXXVI of the Far Eastern Mathematical School-Seminar named after Academician E.V. Zolotov. Vladivostok, 2012, 106–109 p.
4. Dats E.P., Murashkin E.V. Reheating of a thermoelastic plastic ball. Materials of the X Intern. Conf. on Nonequilibrium Processes in Nozzles and Jets (NPNJ'2014), May 25–31, 2014, Alushta. M., MAI Publishing House, 2014. 137–139 p. URL: http://www.npnj.ru/files/npnj2014_web.pdf – 24.06.2020
5. Dats E.P., Murashkin E.V. Thermoelastic plastic deformation of a multilayer ball. Izv. RAS. MTT. 2017;5:30–36.
6. Dats E.P., Murashkin E.V., Velmurugan R. Calculation of irreversible deformations in a hollow elastoplastic ball under conditions of unsteady temperature exposure. Bulletin of the Chuvash State Pedagogical Univ. named after I. Yakovleva. Series *Limit State Mechanics*. 2015(3):168–175. URL: <http://limit21.ru/?do=online&vid=2&nom=214> – 29.03.2020.
7. Semka E.V. Determination of permissible values of control parameters in the ball problem. Modeling of energy-information processes. Materials of the VIII national scientific-practical conference with international participation. Voronezh, VGUIT, 2020. 84–91 p. URL: http://old.vsuet.-ru/science/conference2019/mat_24-26-12-2019.pdf – 30.03.2020.
8. Aleksandrova N.N., Artemov M.A., Baranovskii E.S., Shashkin A.I. On stress/strain state in a rotating disk. AMCSM_2018 IOP. J. of Physics: Conf. Series. 2019(1203):71–80. DOI: <http://doi.-org/10.1088/1742-6596/1203/1/012001>
9. Aleksandrova N.N. Efficiency of the Tresca yield criterion in modeling of annular plates with rigid constraint. Applied Mathematical Modelling. 2019;75:371–384. URL: <http://www.elsevier.com/locate/apm> – 30.03.2019.
10. Burenin A., Murashkin E., Dats E. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process. AIP Conference Proceedings. 2018, vol. 1959, N 1:070008. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5034683>
11. Gamer U. On the elastic-plastic deformation of a sphere subjected to a spherically symmetrical temperature field. J. of Thermal Stresses. 1988(13):159–173.
12. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. N.-Y., McGraw-Hill, 1970, 506 p.